

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ  
ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 1 (9)

2009

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

|  |     |
|--|-----|
| <i>Васин А. В.</i> Об асимптотически оптимальных<br>схемах в базе $\{x y, x\downarrow y, x\&y, x\vee y, \bar{x}\}$ .....   | 3   |
| <i>Смирнов Ю. Г.</i> О существовании и единственности решений<br>обратной краевой задачи для определения эффективной<br>диэлектрической проницаемости наноматериалов .....       | 11  |
| <i>Бойков И. В., Кравченко М. В.</i> Оптимальные методы<br>восстановления лапласовых полей .....   | 25  |
| <i>Бойков И. В.</i> Поперечники некоторых множеств<br>дифференцируемых функций.....  | 44  |
| <i>Долгарев А. И., Зелева Е. В.</i> Кривые 3-мерного галилеева пространства<br>с растром с 2-мерным временем .....   | 55  |
| <i>Долгарев И. А.</i> Поверхности в коммутативной нелинейной<br>геометрии 3-мерного пространства-времени Галилея.....  | 69  |
| <i>Медведик М. Ю., Родионова И. А., Смирнов Ю. Г.</i> Численный метод<br>решения псевдодифференциального уравнения в задаче<br>дифракции в слоях, связанных через отверстие..... | 87  |
| <i>Бойков И. В., Стасюк Б. М., Тарасов Д. В.</i> Приближенное решение<br>некоторых классов гиперсингулярных интегральных уравнений .....   | 100 |

ФИЗИКА

|   |     |
|---|-----|
| <i>Макеева Г. С., Голованов О. А.</i> Электродинамический расчет<br>параметров матрицы рассеяния периодической решетки<br>ферромагнитных нанопроволок в инфракрасном диапазоне..... | 113 |
| <i>Журавлев В. М., Орищенко А. В., Авдонин В. В., Летуновский С. В.</i><br>Модели эволюции распределения частиц<br>по энергии в пространстве скоростей.....                         | 121 |
| <i>Полосин В. Г., Тертычная С. В.</i> Анализ результатов измерений объемной<br>активности радона с помощью распределения Вейбулла-Гнеденко .....                                    | 127 |
| <i>Станкевич А. И.</i> Сингулярно-спектральный анализ<br>корреляционных функций неэквидистантных временных рядов.....   | 134 |

|   |     |
|---|-----|
| <i>Булярский С. В., Цыганков А. В.</i> Термодинамика<br>формирования металлических кластеров .....  | 139 |
| <i>Кревчик В. Д., Семенов М. Б., Смирнов Ю. Г., Грозная Е. В.,<br/>Кревчик П. В., Губина С. А.</i> Трансформация спектров<br>двухфотонного примесного поглощения в условиях<br>диссипативного туннелирования в квантовой молекуле ..... | 145 |

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ СХЕМАХ В БАЗИСЕ $\{x|y, x\downarrow y, x\&y, x\vee y, \bar{x}\}$

*Аннотация.* Рассматривается задача синтеза асимптотически оптимальных схем, реализующих булевы функции, при инверсных неисправностях на выходах элементов в полном базисе  $\{x|y, x\downarrow y, x\&y, x\vee y, \bar{x}\}$ . Доказано, что в рассматриваемом базисе все булевы функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, причем почти для всех функций эти схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной  $3\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где  $\varepsilon$  – вероятность инверсной неисправности на выходе базисного элемента.

*Ключевые слова:* надежные схемы, ненадежные элементы, инверсные неисправности, синтез схем, булевы функции.

*Abstract.* Circuits of unreliable functional elements are considered in basis  $\{x|y, x\downarrow y, x\&y, x\vee y, \bar{x}\}$ . It's possible to realize all boolean functions by asymptotically optimal reliable circuits. Unreliability of these circuits is asymptotically equal  $3\varepsilon$  for almost all boolean functions with  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\varepsilon$  is the probability of inverse failure at the output of the base element).

*Keywords:* reliable circuits, unreliable elements, inverse failure, synthesis of circuits, boolean functions.

### Введение

Все разнообразные средства цифровой техники: ЭВМ, микропроцессорные системы измерений и автоматизации технологических процессов, цифровая связь и телевидение и т.д. – строятся на единой элементной базе, в состав которой входят чрезвычайно разные по сложности микросхемы – от логических элементов, выполняющих простейшие операции, до сложнейших программируемых кристаллов, содержащих миллионы логических элементов.

Для исключения возможных сбоев в работе цифровых устройств прибегают к различным методам. Одним из таких методов является синтез схем, устойчивых к сбоям. Логические элементы цифровых устройств во многом определяют функциональные возможности последних, их конструктивное исполнение, технологичность, надежность. Надежности комбинационных схем (схем из логических элементов) посвящена данная статья, причем элементам схемы приписаны конъюнкция  $x_1 \& x_2$ , дизъюнкция  $x_1 \vee x_2$ , отрицание  $\bar{x}$ , антидизъюнкция (стрелка Пирса)  $x_1 \downarrow x_2$  и антиконъюнкция (штрих Шеффера)  $x_1 | x_2$ . Именно эти логические элементы обычно используют при построении логических устройств.

Будем рассматривать реализацию булевых функций в полном базисе  $B = \{x|y, x\downarrow y, x\&y, x\vee y, \bar{x}\}$ .

Считаем, что схема реализует булеву функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , если при поступлении на входы схемы набора  $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  при отсутствии неис-

правностей на выходе схемы появляется значение  $f(\bar{a})$ . Предполагается, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью  $\epsilon \in (0; 1/2)$  подвержены инверсным неисправностям на выходах.

В работе [1] для инверсных неисправностей на выходах элементов доказано, что при этих неисправностях в базисах  $\{x_1 | x_2\}$  и  $\{x_1 \downarrow x_2\}$  почти все булевы функции можно реализовать асимптотически наилучшими по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной  $3\epsilon$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Асимптотически оптимальные по надежности схемы можно строить со сложностью, по порядку равной сложности минимальных схем, состоящих только из надежных элементов (здесь и далее сложность схемы – число функциональных элементов (ФЭ) в ней).

Из работы [2] известно, что при использовании ненадежных элементов, подверженных инверсным неисправностям на выходах, в базисе  $\{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$  почти все булевы функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной  $3\epsilon$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

В базисе  $\{x_1 | x_2, x_1 \downarrow x_2, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}\}$  вопрос о возможности построения асимптотически оптимальных по надежности схем оставался открытым. Ответ на него получен в этой работе. Доказано, что в базисе  $\{x_1 | x_2, x_1 \downarrow x_2, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}\}$  при инверсных неисправностях на выходах элементов для всех булевых функций можно построить схемы, асимптотически оптимальные по надежности, причем почти для всех функций эти схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной  $3\epsilon$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

### 1 Вспомогательные утверждения

**Теорема 1.** Пусть  $f$  – произвольная булева функция, отличная от константы,  $S$  – любая схема, ее реализующая. Пусть подсхема  $C$  схемы  $S$  содержит выход схемы  $S$  и реализует булеву функцию  $g$  с ненадежностью  $P(C) \leq 1/2$ . Обозначим через  $p_{11}, \dots, p_{1k}$  всевозможные различные вероятности ошибок на выходе схемы  $C$  при нулевых входных наборах  $\tilde{b}$ , т.е.  $g(\tilde{b}) = 0$ . Аналогично, пусть  $p_{01}, \dots, p_{0m}$  – всевозможные различные вероятности ошибок на выходе схемы  $C$  при единичных входных наборах  $\tilde{b}$ , т.е.  $g(\tilde{b}) = 1$ . Полагаем  $p^1 = \min\{p_{11}, \dots, p_{1k}\}$ ,  $p^0 = \min\{p_{01}, \dots, p_{0m}\}$ . Тогда вероятности ошибок на выходе схемы  $S$  удовлетворяют неравенствам  $P_1(S, \bar{a}) \geq p^1$ , если  $f(\bar{a}) = 0$ ;  $P_0(S, \bar{a}) \geq p^0$ , если  $f(\bar{a}) = 1$ .

**Следствие 1.** Из теоремы 1 следует, что  $P(S) \geq p^i, i = 0, 1$ .

Пусть  $S$  – произвольная схема, реализующая булеву функцию  $f$ , отличную от константы. Пусть выходному элементу  $E$  схемы  $S$  приписана функция  $\phi$ , причем первый вход элемента  $E$  соединен с выходом некоторой подсхемы  $S_1$ , второй вход элемента  $E$  соединен с выходом некоторой подсхемы  $S_2$ , и схемы  $S_1$  и  $S_2$  не имеют общих элементов. Обозначим  $P_{f_i(\bar{a})}(S_i, \bar{a})$  – вероятность ошибки на входном наборе  $\bar{a}$  схемы  $S_i$ , реализующей функцию  $f_i, i = 1, 2$ . Докажем леммы 1–6.

**Лемма 1** [3]. Если элементу  $E$  приписана функция  $e = \&$  (конъюнкция), тогда вероятности ошибок на выходе схемы  $S$  (рис. 1) равны:

$P_1(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})$ , если набор  $\tilde{a}$  является нулевым для функций  $f_1$  и  $f_2$ , т.е.  $f_i(\tilde{a}) = 0, i = 1, 2$ ;

$P_1(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))$ , если набор  $\tilde{a}$  такой, что  $f_1(\tilde{a}) = 0, f_2(\tilde{a}) = 1$ ;

$P_1(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(1 - P_0(S_1, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a})$ , если набор  $\tilde{a}$  такой, что  $f_1(\tilde{a}) = 1, f_2(\tilde{a}) = 0$ ;

$P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(P_0(S_1, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a}) - P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a}))$ , если набор  $\tilde{a}$  является единичным для функций  $f_1$  и  $f_2$ , т.е.  $f_i(\tilde{a}) = 1, i = 1, 2$ .

Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок.

**Лемма 2.** Если элемент  $E$  – дизъюнктор, т.е. ему приписана функция  $e = \vee$  (дизъюнкция), тогда вероятности ошибок на выходе схемы  $S$  (рис. 1) равны:

$P_1(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(P_1(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}) - P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a}))$ , если набор  $\tilde{a}$  является нулевым для функций  $f_1$  и  $f_2$ , т.е.  $f_i(\tilde{a}) = 0, i = 1, 2$ ;

$P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))$ , если набор  $\tilde{a}$  такой, что  $f_1(\tilde{a}) = 0, f_2(\tilde{a}) = 1$ ;

$P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(1 - P_0(S_1, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a})$ , если набор  $\tilde{a}$  такой, что  $f_1(\tilde{a}) = 1, f_2(\tilde{a}) = 0$ ;

$P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})$ , если набор  $\tilde{a}$  является единичным для функций  $f_1$  и  $f_2$ , т.е.  $f_i(\tilde{a}) = 1, i = 1, 2$ .

Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок.

**Лемма 3.** Если элементу  $E$  приписана функция  $e = \downarrow$  (стрелка Пирса), тогда вероятности ошибок на выходе схемы  $S$  (рис. 1) равны:

$P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(P_1(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}) - P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a}))$ , если набор  $\tilde{a}$  является нулевым для функций  $f_1$  и  $f_2$ , т.е.  $f_i(\tilde{a}) = 0, i = 1, 2$ ;

$P_1(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(1 - P_1(S_1, \tilde{a}))P_0(S_2, \tilde{a})$ , если набор  $\tilde{a}$  такой, что  $f_1(\tilde{a}) = 0, f_2(\tilde{a}) = 1$ ;

$P_1(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_0(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))$ , если набор  $\tilde{a}$  такой, что  $f_1(\tilde{a}) = 1, f_2(\tilde{a}) = 0$ ;

$P_1(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})$ , если набор  $\tilde{a}$  является единичным для функций  $f_1$  и  $f_2$ , т.е.  $f_i(\tilde{a}) = 1, i = 1, 2$ .

Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок.

**Лемма 4.** Если элементу  $E$  приписана функция  $e = |$  (штрих Шеффера), тогда вероятности ошибок на выходе схемы  $S$  (рис. 1) равны:

$P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})$ , если набор  $\tilde{a}$  является нулевым для функций  $f_1$  и  $f_2$ , т.е.  $f_i(\tilde{a}) = 0, i = 1, 2$ ;

$P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(1 - P_1(S_1, \tilde{a}))P_0(S_2, \tilde{a})$ , если набор  $\tilde{a}$  такой, что  $f_1(\tilde{a}) = 0, f_2(\tilde{a}) = 1$ ;

$P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_0(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))$ , если набор  $\tilde{a}$  такой, что  $f_1(\tilde{a}) = 1, f_2(\tilde{a}) = 0$ ;

$P_1(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(P_0(S_1, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a}) - P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a}))$ , если набор  $\tilde{a}$  является единичным для функций  $f_1$  и  $f_2$ , т.е.  $f_i(\tilde{a}) = 1, i = 1, 2$ .

Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок.

**Лемма 5.** Если элементу  $E$  приписана функция  $e(x, y) \in B$ , то функция  $e(x, x)$  реализует функцию  $x^b$ , тогда вероятности ошибок на выходе схемы  $S$  (рис. 2) на наборе  $\tilde{a}$  равны:  $P_{f^b(\tilde{a})}(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S_1, \tilde{a})$ .

Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок.

**Лемма 6.** Если элемент  $E$  – инвертор, то вероятности ошибок на выходе схемы  $S$  (рис. 3) равны:

$P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_1(S_1, \tilde{a})$ , если набор  $\tilde{a}$  является нулевым для функции  $\bar{f}$ , т.е.  $\bar{f}(\tilde{a}) = 0$ ;

$P_1(S, \tilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_0(S_1, \tilde{a})$ , если набор  $\tilde{a}$  такой, что  $\bar{f}(\tilde{a}) = 1$ .

Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок.

Пусть в схеме  $S$ , реализующей булеву функцию, отличную от константы, выделена подсхема  $A$ , имеющая один вход и содержащая выход схемы. Обозначим через  $S'$  подсхему, получаемую из схемы  $S$  удалением подсхемы  $A$ . Если выполнено неравенство  $P(S) > P(S')$ , то будем говорить, что схема  $S'$  надежнее схемы  $S$  и получается из  $S$  удалением подсхемы  $A$ .

Так как схема  $S$  реализует функцию, отличную от константы, схема  $A$  реализует либо тождественную функцию, либо инверсию.

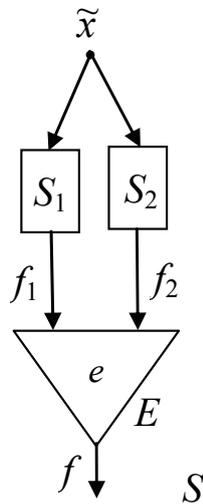


Рис. 1

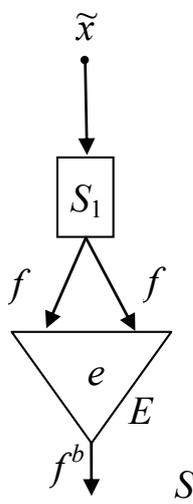


Рис. 2

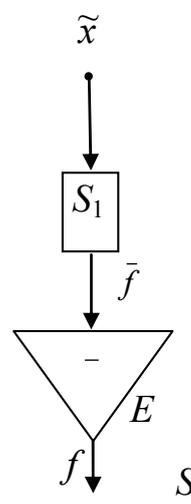


Рис. 3

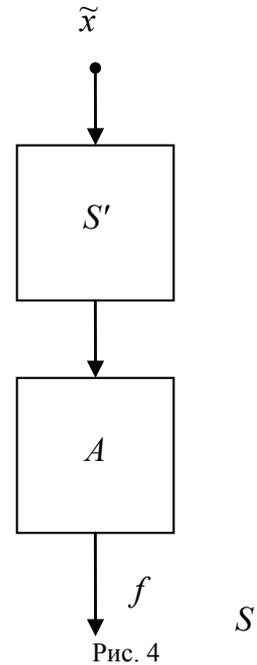


Рис. 4

**Определение 1.** Схема  $S$ , реализующая функцию  $f$ , отличную от константы, является *bc*-схемой, если из нее нельзя получить более надежную

схему, реализующую  $f$  или  $\bar{f}$ , удалением подсхемы, реализующей тождественную функцию или инверсию.

**Теорема 2** [4, 5]. Пусть схема  $S$ , ненадежность которой равна  $P(S)$ , реализует функцию  $f$  и является  $bc$ -схемой. Если в схеме  $S$  можно выделить подсхему, имеющую один вход, содержащую выход схемы и реализующую инверсию или тождественную функцию с вероятностями ошибок  $p_0$  и  $p_1$  такими, что  $0 < p_0 + p_1 < 1$ , то верно неравенство

$$\min \left\{ \frac{p_0}{p_0 + p_1}, \frac{p_1}{p_0 + p_1} \right\} \leq P(S).$$

## 2 Верхние оценки ненадежности

**Теорема 3** [2]. При  $\varepsilon \in (0, 1/128]$  любую булеву функцию в базе  $\{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$  можно реализовать такой схемой  $S$ , что  $P(S) \leq 3\varepsilon + 32\varepsilon^2$ .

Поскольку базис  $\{x \& y, x \vee y, \bar{x}\} \subset B$ , то справедлива теорема 4.

**Теорема 4.** При  $\varepsilon \in (0, 1/128]$  любую булеву функцию можно реализовать схемой  $S$  в базе  $B$ , что  $P(S) \leq 3\varepsilon + 32\varepsilon^2$ .

## 3 Нижние оценки ненадежности

Пусть  $K(n)$  – множество булевых функций  $f$ , зависящих от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , не представимых в виде  $(x_i^a \& g(\bar{x}))^b$  ( $i = 1, 2, \dots, n, a, b \in \{0, 1\}$ ).

**Замечание 1.** Схема, реализующая функцию из класса  $K(n)$ , содержит не менее трех элементов.

**Теорема 5.** Пусть  $\varepsilon \in (0, 1/6]$ , функция  $f(\bar{x}) \in K(n)$ , и пусть  $S$  – любая схема в базе  $B$ , реализующая функцию  $f$ . Тогда  $P(S) \geq 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$ .

**Доказательство.** Пусть булева функция  $f \in K(n)$  и  $S$  – любая схема, реализующая эту функцию. Без ограничения общности будем считать, что  $S$  является  $bc$ -схемой. Поскольку схема  $S$  содержит не менее трех элементов, выделим в ней подсхему  $A$ , состоящую ровно из трех элементов. Возможные варианты для  $A$  приведены на рис. 5–12. Сначала рассмотрим схемы на рис. 5 и 6.

В схемах на рис. 5, 6 входы выходного элемента соединены с выходами разных элементов, т.е. в схеме  $S$  нельзя выделить подсхему с одним входом и одним выходом, содержащую выход схемы. На рис. 5, 6 выходной элемент  $E_1$  не является инвертором, а элементам  $E_2$  и  $E_3$  может быть приписана любая из базисных функций (если это инверсия, то считаем, что на правый вход элемента поступает фиктивная переменная).

Пусть выход элемента  $E_2$  ( $E_3$ ) не соединен со входом элемента  $E_3$  ( $E_2$ ) (см. рис. 5). Если выходному элементу  $E_1$  схемы  $A$  (рис. 5) приписана одна из функций  $\downarrow$  или  $\&$ , тогда из лемм 1 и 3 следует, что на любом единичном наборе вероятность ошибки равна  $p_0 = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(2\varepsilon - \varepsilon^2)$  и, следовательно,  $p^0 = 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$ . Если же выходному элементу  $E_1$  схемы  $A$  (рис. 5) приписана одна из функций  $|$  или  $\vee$ , то из лемм 2 и 4 получаем, что на любом еди-

ничном наборе вероятность ошибки равна  $p_1 = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(2\varepsilon - \varepsilon^2)$  и, следовательно,  $p^1 = 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$ . И по следствию 1 получаем,  $P(S) \geq 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$ .

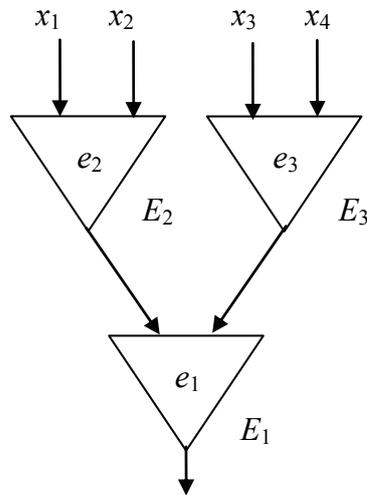


Рис. 5

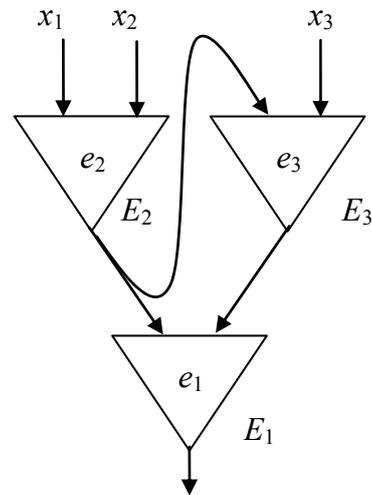


Рис. 6

Пусть выход одного из элементов (например, для определенности выход  $E_2$ ) соединен со входом другого элемента ( $E_3$ ) (см. рис. 6). Заметим, что элемент  $E_3$  не может быть инвертором, иначе схема реализует константу, что противоречит условиям теоремы. Если выходному элементу  $E_1$  схемы  $A$  (рис. 6) приписана одна из функций  $\downarrow$  или  $\&$ , тогда независимо от приписанной элементу  $E_2$  функции  $e_2$  вероятность ошибки  $p_0 = p^0 = (1 - \varepsilon)(2\varepsilon(1 - \varepsilon)) + \varepsilon(1 - \varepsilon) = 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$ .

Если выходному элементу  $E_1$  схемы  $A$  (рис. 6) приписана одна из функций  $\vee$  или  $\mid$ , то независимо от приписанной элементу  $E_2$  функции  $e_2$  вероятность ошибки  $p_1 = p^1 = (1 - \varepsilon)(2\varepsilon(1 - \varepsilon)) + \varepsilon(1 - \varepsilon) = 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$ . И по следствию 1 получаем  $P(S) \geq 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$ .

Пусть в схеме  $S$  можно выделить подсхему  $A_1$  с одним входом, содержащую выход схемы. Возможны случаи, изображенные на рис. 7–12.

Из лемм 5 и 6 следует, что для любой из подсхем  $A_1$  (рис. 7–12) верно равенство  $p_0 = p_1$ . Причем для подсхем  $A_1$  на рис. 7, 8 выполнено равенство  $p_0 = p_1 = \varepsilon$ , а для подсхем  $A_1$  на рис. 9–12 выполнено равенство  $p_0 = p_1 = 2\varepsilon(1 - \varepsilon)$ . И в том, и в другом случаях при  $\varepsilon \in (0, 1/128]$  условие  $0 < p_0 + p_1 < 1$  теоремы 2 выполнено, поэтому

$$P(S) \geq \min \left\{ \frac{p_0}{p_0 + p_1}, \frac{p_1}{p_0 + p_1} \right\} = \frac{1}{2}.$$

При  $\varepsilon \in (0, 1/6]$  верно неравенство  $\frac{1}{2} \geq 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$ . Следовательно,  $P(S) \geq 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$ . Теорема доказана.

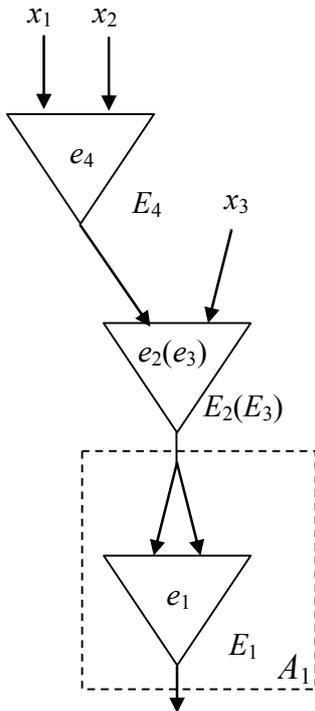


Рис. 7

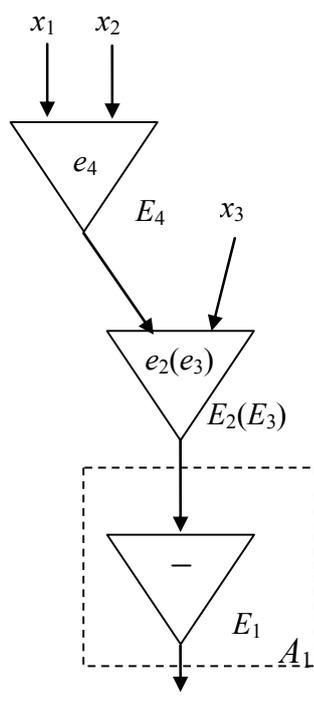


Рис. 8

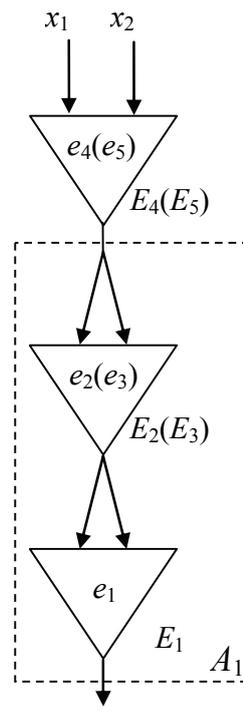


Рис. 9

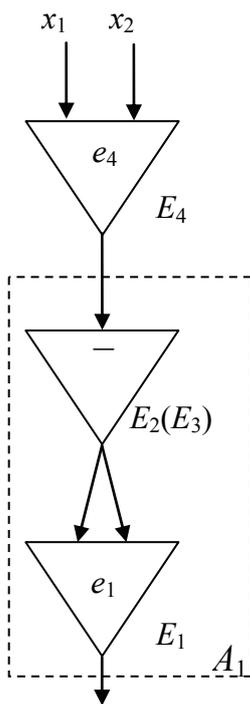


Рис. 10

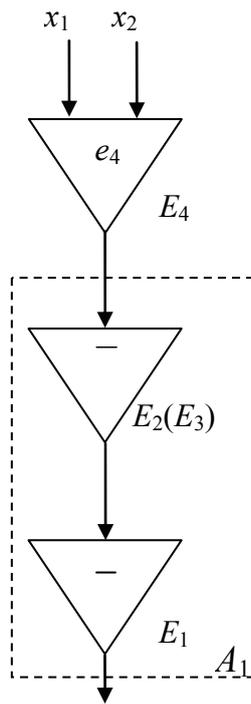


Рис. 11

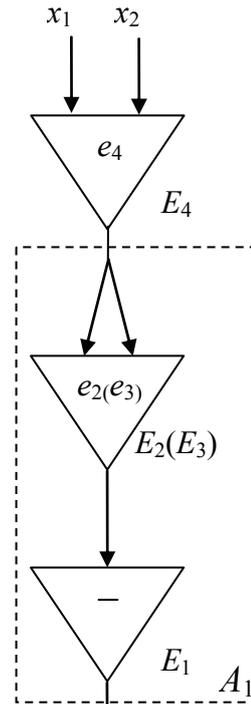


Рис. 12

Из теоремы 5 следует, что при  $\varepsilon \in (0, 1/128]$  любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 4 и реализующая булеву функцию  $f(\vec{x}) \in K(n)$ ,

является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с надежностью, асимптотически равной  $3\epsilon$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Таким образом, расширение неприводимых полных базисов  $\{x|y\}$ ,  $\{x\downarrow y\}$ , а также базиса  $\{x\&y, x\vee y, \bar{x}\}$  до базиса  $B = \{x|y, x\downarrow y, x\&y, x\vee y, \bar{x}\}$  не повлияло на асимптотическую оценку ненадежности схем.

#### **Список литературы**

1. **Алехина, М. А.** О надежности и сложности схем в базисе  $\{x|y\}$  при инверсных неисправностях элементов / М. А. Алехина // Дискретный анализ и исследование операций. – Новосибирск : Изд-во института математики. – 2005. – Апрель–июнь. – Т. 12. – № 2. – С. 3–11. – (Серия 1).
2. **Васин, А. В.** Об асимптотически оптимальных схемах в базисе  $\{x\&y, x\vee y, \bar{x}\}$  при инверсных неисправностях на выходах элементов / А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 4. – С. 3–17.
3. **Алехина, М. А.** Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем / М. А. Алехина, А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические наук. – 2009. – № 2.
4. **Алехина, М. А.** Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных элементов : монография / М. А. Алехина. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2006.
5. **Чугунова, В. В.** Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем при инверсных неисправностях на входах элементов : дис. ... канд. физико-математических наук / В. В. Чугунова. – Пенза, 2007.

---

**Васин Алексей Валерьевич**  
аспирант,  
Пензенский государственный  
университет

**Vasin Alexey Valeryevich**  
post-graduate student,  
Penza State University

---

УДК 519.9

**Васин, А. В.**

**Об асимптотически оптимальных схемах в базисе  $\{x|y, x\downarrow y, x\&y, x\vee y, \bar{x}\}$  / А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 3–10.**

УДК 517.6+537.874.6

Ю. Г. Смирнов

## О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НАНОМАТЕРИАЛОВ\*

*Аннотация.* Работа посвящена исследованию задачи определения эффективной диэлектрической проницаемости образцов наноматериалов произвольной геометрической формы, помещенных в прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками. Задача сводится к решению нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения. Интегральное уравнение изучается, опираясь на результаты исследования соответствующей краевой задачи и теореме эквивалентности краевой задачи и интегрального уравнения. Доказана теорема о существовании и единственности решений нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения и обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов.

*Ключевые слова:* краевые задачи, обратные краевые задачи электродинамики, интегральные уравнения, теоремы о существовании и единственности решений.

*Abstract.* The paper is devoted to the problem of reconstruction of effective permittivity of nanomaterials of arbitrary shape located in rectangular waveguide with perfectly conducting walls. The problem is reduced to the nonlinear volume singular integral equation. Research of the integral equation is based on the theorem of equivalence of boundary value problem and integral equation. Theorem of existence and uniqueness of solutions of integral equation and boundary value problem for reconstruction of effective permittivity of nanomaterials is solved.

*Keywords:* inverse boundary value problems, integral equations, electromagnetic problems, theorems of existence and uniqueness of solutions.

### Введение

Работа посвящена исследованию вопросов существования и единственности решений в задаче определения эффективной диэлектрической проницаемости образцов наноматериалов произвольной геометрической формы, помещенных в прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками.

Определение диэлектрических параметров нанокompозитных материалов и сложных наноструктур с различной геометрией является актуальной задачей при использовании нанокompозитных материалов и наноструктур на практике. Однако эти параметры не могут быть измерены экспериментально. Это приводит к необходимости применять методы математического моделирования и решать задачи численно с помощью компьютеров. При этом приходится решать трехмерные векторные задачи в полной электродинамической постановке. Решение таких задач является в настоящее время одной из самых актуальных проблем в электродинамике. Решение этих задач с прием-

---

\* Работа выполнена в рамках ФЦП Минобрнауки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» (регистрационный номер 2.1.1/1647) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-07-89063а).

лемой для практики точностью на электродинамическом уровне строгости математическими методами требует очень большого объема вычислений и часто невозможно даже на самых современных суперкомпьютерах. Особенно остро стоит проблема решения обратных электродинамических задач на сложной системе тел в резонансном диапазоне частот, возникающая при определении параметров нанокompозитных материалов и наноструктур [1].

Таким образом, возникает необходимость разработки новых методов решения указанного круга задач. Одним из перспективных методов является метод объемных сингулярных интегральных уравнений [2–4]. Здесь оператор задачи получается эллиптическим, а интегральное уравнение решается только внутри тела (в области неоднородности). В отличие от [3], мы изучаем интегральное уравнение, опираясь, в основном, на результаты исследования соответствующей краевой задачи и теореме эквивалентности краевой задачи и интегрального уравнения. На этом пути удастся доказать теорему о существовании и единственности решений в  $L_2$  нелинейного интегрального уравнения, в также теорему о существовании и единственности решений обратной краевой задачи.

### **1 Краевая задача дифракции для системы уравнений Максвелла**

Рассмотрим следующую задачу дифракции. Пусть в декартовой системе координат  $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$  – резонатор с идеально проводящей поверхностью  $\partial P$ . В резонаторе расположено объемное тело  $Q$  ( $Q \subset P$  – область), характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_0$  и положительной  $3 \times 3$ -матрицей-функцией (тензором) диэлектрической проницаемости  $\bar{\epsilon}(x)$ . Компоненты  $\bar{\epsilon}(x)$  являются ограниченными функциями в области  $\bar{Q}$ ,  $\bar{\epsilon} \in L_\infty(Q)$ , а также  $\bar{\epsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$ .

Граница  $\partial Q$  области  $Q$  кусочно-гладкая. Точнее, предположим, что для каждой точки границы  $x_0 \in \partial Q$  существует окрестность  $\Theta$  (в  $R^3$ ) и  $C^2$ -диффеоморфизм этой окрестности на  $R^3$ , при котором точка  $x_0$  переходит в точку  $0$ , а образом множества  $\Theta \cap Q$  является множество одного из следующих типов (ниже  $(x_1, x_2, x_3)$  – декартовы;  $(r, \theta)$ ,  $r \geq 0$ ,  $\theta \in S^2$  – сферические координаты в  $R^3$ ). Либо  $x_1 > 0$  ( $x_0$  – точка гладкости границы); либо  $x_1 > 0, x_2 > 0$  ( $x_0$  – точка на «выходящем» ребре); либо  $R^3 \setminus \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$  ( $x_0$  – точка на «входящем» ребре); либо  $r > 0, \theta \in Q'$ , где  $Q' \subset S^2$  – односвязная область с кусочно-гладкой границей  $\partial Q'$  ( $x_0$  – вершина «конуса с ребрами»). В частности, если  $\partial Q'$  – гладкая, то  $x_0$  – коническая точка; если  $\partial Q'$  образована дугами больших окружностей, то  $x_0$  – вершина многогранного угла. Пусть  $Q$  – ограниченная область и каждая точка  $x \in \partial Q$  принадлежит одному из этих типов. Тогда будем говорить, что  $Q$  – область с кусочно-гладкой границей. Будем также предполагать, что тело  $Q$  не касается стенок резонатора,  $\partial Q \cap \partial P = \emptyset$ . В  $P \setminus \bar{Q}$  среда изотропна и однородна с постоянными  $\epsilon_0 (> 0)$ ,  $\mu_0 (> 0)$ .

Требуется определить электромагнитное поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(P)$ , возбуждаемое в резонаторе сторонним полем с временной зависимостью вида  $e^{-i\omega t}$ . Источник стороннего поля – электрический ток  $\mathbf{j}^0 \in L_{2,loc}(P)$ . В области  $P \subset R^3$  стандартные дифференциальные операторы grad, div, rot понимаются в смысле обобщенных функций.

Будем искать «слабые» (обобщенные) решения системы уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \bar{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \end{cases} \quad (1)$$

Эти решения должны удовлетворять условиям на бесконечности [6]: поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  при  $|x_3| > C$  для достаточно больших  $C > 0$  имеют представление (+ соответствует  $+\infty$ , – соответствует  $-\infty$ )

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} &= \sum_p R_p^{(\pm)} e^{i\gamma_p^{(1)} |x_3|} \begin{pmatrix} \lambda_p^{(1)} \Pi_p e_3 - i\gamma_p^{(1)} \nabla_2 \Pi_p \\ -i\omega \epsilon_0 (\nabla_2 \Pi_p) \times e_3 \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_p Q_p^{(\pm)} e^{i\gamma_p^{(2)} |x_3|} \begin{pmatrix} i\omega \mu_0 (\nabla_2 \Psi_p) \times e_3 \\ \lambda_p^{(2)} \Psi_p e_3 - i\gamma_p^{(2)} \nabla_2 \Psi_p \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\gamma_p^{(j)} = \sqrt{k_0^2 - \lambda_p^{(j)}}$ ,  $\text{Im } \gamma_p^{(j)} > 0$  или  $\text{Im } \gamma_p^{(j)} = 0$ ,  $k\gamma_p^{(j)} \geq 0$  и  $\lambda_p^{(1)}$ ,  $\Pi_p(x_1, x_2)$  и  $\lambda_p^{(2)}$ ,  $\Psi_p(x_1, x_2)$  ( $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ ) – полная система собственных значений и ортонормированных в  $L_2(\Pi)$  собственных функций двумерного оператора Лапласа  $-\Delta$  в прямоугольнике  $\Pi := \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$  с условиями Дирихле и Неймана соответственно, и  $\nabla_2 \equiv e_1 \partial/\partial x_1 + e_2 \partial/\partial x_2$ . Для коэффициентов разложений (2) имеют место оценки

$$R_p^{(\pm)}, Q_p^{(\pm)} = O(p^m), p \rightarrow \infty, \quad (3)$$

для всех  $m \in N$ .

С физической точки зрения условия (2) означают, что рассеянное поле является суперпозицией нормальных волн, расходящихся от тела. Условия (3) обеспечивают экспоненциальную сходимость рядов (2), а также возможность почленного дифференцирования по  $x_j$  любое число раз.

Для  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  должны выполняться краевые условия на стенках резонатора

$$\mathbf{E}_\tau |_{\partial P} = 0, \mathbf{H}_\nu |_{\partial P} = 0. \quad (4)$$

Если выполняются уравнения Максвелла, то второе условие в (4) следует из первого, и его можно опустить. Но если рассматривать оператор Максвелла, порождаемый левой частью (1), то надо ставить оба условия.

Для  $u \in H^1(P)$  существуют граничные значения из пространства  $H^{1/2}(\partial P)$  в смысле теории следов. Почти везде на  $\partial P$  определен вектор нормали.

Пусть также  $\mathbf{E}^0$  и  $\mathbf{H}^0$  – решения рассматриваемой краевой задачи в отсутствие неоднородного тела  $Q$ ,  $\hat{\epsilon}(x) = \epsilon_0 \hat{I}$ ,  $x \in P$  ( $\hat{I}$  – единичный тензор):

$$\text{rot} \mathbf{H}^0 = -i\omega \epsilon_0 \mathbf{E}^0 + \mathbf{j}_E^0, \quad \text{rot} \mathbf{E}^0 = i\omega \mu_0 \mathbf{H}^0 \quad (5)$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{E}_\tau^0|_{\partial P} = 0, \mathbf{H}_\nu^0|_{\partial P} = 0. \quad (6)$$

Эти решения могут быть выражены аналитически через  $\mathbf{j}_E^0$  с помощью введенного ниже тензора Грина. Решения не обязаны удовлетворять условиям на бесконечности. Например,  $\mathbf{E}^0$  и  $\mathbf{H}^0$  могут быть ТМ- или ТЕ-модой этого волновода.

Имеют место результаты о гладкости решений задач (1)–(4) и (5), (6) при более гладких данных [2]. Сформулируем один из таких результатов.

**Утверждение 1.** Пусть  $\mathbf{j}_E^0 \in H^1_{loc}(P)$ . Тогда  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0 \in H^1_{loc}(P)$ . Пусть, кроме того,  $\partial Q \in C^2$ ,  $\hat{\epsilon} \in C^1(\bar{Q})$ . Тогда сужения  $\mathbf{E}|_Q, \mathbf{H}|_Q \in H^1(Q)$  и  $\mathbf{E}|_{P \setminus Q}, \mathbf{H}|_{P \setminus Q} \in H^1_{loc}(P \setminus Q)$ . Кроме того, справедливы условия сопряжения на  $\partial Q$ :

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q} = 0, [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q} = 0,$$

где  $[\cdot]$  означает разность следов с разных сторон  $\partial Q$ .

В предположениях утверждения 1 краевые условия на  $\partial P$  и условия сопряжения на  $\partial Q$  понимаются в смысле равенства следов элементов из  $H^{1/2}_{loc}(\partial P)$  и  $H^{1/2}(\partial Q)$ . Ясно, что при первоначальных общих предположениях о тензоре  $\hat{\epsilon}$  такие условия сопряжения не имеют смысла.

## 2 Тензорная функция Грина прямоугольного волновода

Построим диагональный тензор Грина  $\hat{G}_E$ , компоненты которого являются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца в  $P$  с коэффициентом  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$  и удовлетворяют краевым условиям первого или второго рода на  $\partial P$ , обеспечивающим обращение в нуль тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на стенках волновода. Его компоненты имеют вид (см. [2])

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|}}{\gamma_{nm}(1 + \delta_{0n})} \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2; \quad (7)$$

$$G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|}}{\gamma_{nm}(1 + \delta_{0m})} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2; \quad (8)$$

$$G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2. \quad (9)$$

В этих выражениях  $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$ , при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы  $\text{Im} \gamma_{nm} \geq 0$ .

Запишем  $G_E^m$  с выделенной особенностью при  $x = y$ :

$$G_E^m = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} + g^m(x, y), \quad x, y \in P, \quad (10)$$

где функция  $g^m \in C^\infty(\bar{Q} \times \bar{P})$  (см. [5, с. 132]).

Отсюда и в силу симметрии функций Грина  $G_E^m(x, y) = G_E^m(y, x)$  ( $m = 1, 2, 3$ ) имеем

**Утверждение 2.** Тензор Грина  $\hat{G}_E$  допускает представление

$$\hat{G}_E = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} \hat{I} + \hat{g}(x, y), \quad x, y \in P, \quad (11)$$

где матрица-функция (тензор)  $\hat{g} \in C^\infty(\bar{Q} \times \bar{P})$  и  $\hat{g} \in C^\infty(\bar{P} \times \bar{Q})$ .

Такое представление функции Грина удобно для теоретического исследования задачи дифракции, но непригодно для численных расчетов, т.к. не содержит алгоритма вычисления  $\hat{g}$ . В работе [5] изложен конструктивный метод выделения особенности, позволяющий корректно вычислять значения функции Грина вблизи особых точек.

Отметим, что функции Грина имеют единственную особенность вида  $\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|}$  и не имеют других особенностей в силу сделанного нами предположения о том, что тело не касается поверхности волновода.

### 3 Объемное сингулярное интегральное уравнение

Наша ближайшая цель – свести краевую задачу к объемному сингулярному интегральному уравнению и доказать теорему эквивалентности.

Пусть решения краевых задач (1)–(4) и (5), (6) существуют и единственны. Перепишем (1) в эквивалентной форме:

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{j}_E, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{j}_E = \mathbf{j}_E^0 + \mathbf{j}_E^p. \quad (13)$$

В последнем равенстве  $\mathbf{j}_E^p = -i\omega(\hat{\epsilon}(x) - \epsilon_0 \hat{I}) \mathbf{E}$  – электрический ток поляризации.

Нетрудно проверить, что решение краевой задачи (12), (4) имеет вид

$$\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{A}_E - \frac{1}{i\omega\epsilon_0}\text{grad div } \mathbf{A}_E, \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}_E, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{A}_E = \int_P \widehat{G}_E(r)\mathbf{j}_E(y)dy - \quad (15)$$

векторный потенциал электрического тока.

Потенциал  $\mathbf{A}_E$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathbf{A}_E + k_0^2\mathbf{A}_E = -\mathbf{j}_E. \quad (16)$$

Таким образом, потенциал  $\mathbf{A}_E$  есть свертка с тензором Грина прямоугольного резонатора для уравнения Гельмгольца, обеспечивающий выполнение требуемых краевых условий для полей.

Однако формулы (14) не дают явного решения задачи (12), (4), т.к. ток  $\mathbf{j}_E$  зависит от  $\mathbf{E}$ . Из соотношений (13)–(15) для поля  $\mathbf{E}$  следует интегродифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \widehat{G}_E(r) \left[ \frac{\widehat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y)dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \widehat{G}_E(r) \left[ \frac{\widehat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y)dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (17)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \widehat{G}_E(r) \left[ \frac{\widehat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y)dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \widehat{G}_E(r) \left[ \frac{\widehat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y)dy, \quad x \in P \setminus Q. \end{aligned} \quad (18)$$

Формула (18) дает представление решения  $\mathbf{E}(x)$  в области  $P \setminus Q$ , если  $\mathbf{E}(y)$ ,  $y \in Q$  – решение уравнения (17). Поле  $\mathbf{H}$  выражается через решение (17) в виде

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{H}^0(x) - i\omega\epsilon_0 \text{rot} \int_Q \widehat{G}_E(r) \left[ \frac{\widehat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y)dy, \quad x \in P. \quad (19)$$

Сведем полученное выше интегродифференциальное уравнение к объемному векторному сингулярному интегральному уравнению.

Представим функцию Грина в виде

$$\widehat{G}_E(r) = \widehat{G}_0(r) + \widehat{G}_1(r) + \widehat{G}_2(r), \quad r = |x - y|, \quad (20)$$

$$\widehat{G}_0(r) = \frac{e^{ik_0 r} - 1}{4\pi r} \cdot \widehat{I}, \widehat{G}_1(r) = \frac{1}{4\pi r} \cdot \widehat{I}, \widehat{G}_2(r) = \text{diag}\{g^1, g^2, g^3\}. \quad (21)$$

Применяя теорему [6] о дифференцировании интеграла с ядром, имеющим слабую особенность, приходим к известному [3] представлению:

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{1}{4\pi r} U_n(y) dy = \text{v.p.} \int_Q \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_n} \frac{1}{4\pi r} U_n(y) dy - \frac{1}{3} \delta_{ln} U_n(x). \quad (22)$$

Используя полученные соотношения, переходим от интегродифференциального уравнения (16) к векторному сингулярному интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) + \frac{1}{3} \left[ \frac{\widehat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(x) - \text{v.p.} \int_Q \widehat{\Gamma}_1(x, y) \left[ \frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy - \\ - \int_Q \widehat{\Gamma}(x, y) \left[ \frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy - \int_Q \widehat{\Gamma}_2(x, y) \left[ \frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}^0(x). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь тензоры  $\widehat{\Gamma}$ ,  $\widehat{\Gamma}_1$ ,  $\widehat{\Gamma}_2$  имеют вид

$$\widehat{\Gamma}(x, y) = k_0^2 \widehat{G}_E(r) + (\cdot, \text{grad}) \text{grad} G_0(r); \quad (24)$$

$$\widehat{\Gamma}_1(x, y) = (\cdot, \text{grad}) \text{grad} G_1(r); \quad (25)$$

$$(\widehat{\Gamma}_2(x, y))_{ij} = \frac{\partial^2 g^j(r)}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (26)$$

Вопрос о разрешимости уравнения (23) и об эквивалентности краевой задачи дифракции и сингулярного интегрального уравнения устанавливается в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть тело  $Q$  с кусочно-гладкой границей  $\partial Q$  характеризуется положительным тензором диэлектрической проницаемости  $\widehat{\varepsilon} \in L_\infty(Q)$  и  $\widehat{\varepsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$ . Пусть  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$  – единственные решения краевых задач (1)–(4) и (5), (6) соответственно. Тогда существует и единственно решение  $\mathbf{E} \in L_2(Q)$  уравнения (23). Обратно, если  $\mathbf{E} \in L_2(Q)$  – решение интегрального уравнения (23), то формулы (13)–(15), (18), (19) дают решение краевой задачи для системы уравнений Максвелла (1), удовлетворяющее условию (4).

Перепишем интегральное уравнение (23) для электрического поля в виде

$$(I + S - K)\mathbf{E} = \mathbf{E}^0, \quad (27)$$

где операторы  $S$  и  $K$  определяются в соответствии с (23):

$$(S\mathbf{E})(x) = \frac{1}{3} \left[ \frac{\widehat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(x) - \text{v.p.} \int_Q \widehat{\Gamma}_1(x, y) \left[ \frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy;$$

$$(KE)(x) = \int_Q \widehat{\Gamma}(x, y) \left[ \frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \int_Q \widehat{\Gamma}_2(x, y) \left[ \frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy. \quad (28)$$

Имеет место [2] следующий результат о разрешимости уравнения (27).

**Теорема 2.** Пусть однородное уравнение (27) имеет только тривиальное решение и тензор диэлектрической проницаемости таков, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in Q} \left[ \sum_{l,n=1}^3 \left| \frac{\varepsilon_{ln}(x)}{\varepsilon_0} - \delta_{ln} \right|^2 \right]^{1/2} < \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^{-1}. \quad (29)$$

Тогда уравнение (27) однозначно разрешимо для любой правой части  $\mathbf{E}^0 \in L_2(Q)$ .

Часто интерес представляют задачи рассеяния в среде, характеризующейся постоянной во всем объеме резонатора диэлектрической проницаемостью ( $\widehat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \widehat{I}$ ) и тензорной магнитной проницаемостью  $\widehat{\mu}$  в  $Q$  (вне  $Q$   $\widehat{\mu} = \widehat{\mu}_0 \widehat{I}$ ). В этом случае краевая задача сводится к объемному сингулярному интегральному уравнению (такого же типа) для магнитного поля и выражению для электрического поля через решение этого уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x) &= \mathbf{H}^0(x) + k_0^2 \int_Q \widehat{G}_H(r) \left[ \frac{\widehat{\mu}(y)}{\mu_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{H}(y) dy + \\ &+ \operatorname{grad\,div} \int_Q \widehat{G}_H(r) \left[ \frac{\widehat{\mu}(y)}{\mu_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{H}(y) dy, \quad x \in Q; \\ \mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}^0(x) + i\omega\mu_0 \operatorname{rot} \int_Q \widehat{G}_H(r) \left[ \frac{\widehat{\mu}(y)}{\mu_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{H}(y) dy, \quad x \in P. \end{aligned}$$

В последних формулах  $\widehat{G}_H(x, y)$  – тензорная функция Грина прямоугольного волновода, отвечающая произвольному распределению источников магнитного поля. Как и для рассматривавшейся функции Грина  $\widehat{G}_E(x, y)$ , имеет место представление в виде суммы сингулярного слагаемого того же вида и гладкой функции. Следовательно, для обратной краевой задачи об определении эффективной магнитной проницаемости материала будут верны теоремы, аналогичные сформулированным в этой статье.

#### 4 Обратная краевая задача

Мы будем рассматривать обратную краевую задачу для определения эффективной диэлектрической проницаемости образца наноматериала, расположенного в волноводе. Рассмотрим изотропный случай и будем считать, что  $\widehat{\varepsilon}(x) = \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – неизвестная константа (эффективная диэлектрическая проницаемость) образца [1]. Предположим, что  $\pi/a < k_0 < \pi/b$ . В этом случае в волноводе может распространяться только одна мода, потому что

$\text{Im}\gamma_1^{(2)} = 0$ ,  $\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \pi^2/a^2} > 0$  и  $\text{Im}\gamma_p^{(j)} > 0$  для всех  $p, j$  за исключением  $p=1$  и  $j=2$ . Мы также предполагаем, что

$$\mathbf{E}^0(x) = e_2 A^{(+)} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3}.$$

Здесь  $A^{(+)}$  – (известная) амплитуда распространяющейся волны,  $\psi_1 = \cos \pi x_1/a$ . Следовательно,  $G_E^1 \rightarrow 0$  и  $G_E^2 \rightarrow 0$  равномерно по  $y \in Q$  при  $|x_3| \rightarrow \infty$ . Мы также получаем

$$G_E^2 - \frac{1}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} |x_3 - y_3|} \rightarrow 0,$$

равномерно по  $y \in Q$  при  $|x_3| \rightarrow \infty$ . Затем мы имеем  $\text{div } \hat{G}_E \rightarrow 0$  равномерно по  $y \in Q$  при  $|x_3| \rightarrow \infty$  (потому что  $\frac{\partial G_E^2}{\partial x_2} \rightarrow 0$  равномерно по  $y \in Q$  при  $|x_3| \rightarrow \infty$ ). Вычислив предел при  $|x_3| \rightarrow \infty$  в (18), получим уравнение

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_Q G_E^2(x, y) E_2(y) dy, \quad x \in Q; \quad (30)$$

и, принимая во внимание условие на бесконечности (2) при  $|x_3| \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} e_2 Q_1^{(+)} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} &= e_2 A^{(+)} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} + \\ &+ \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{k_0^2 e_2}{ab\gamma_{10}} \int_Q \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} (x_3 - y_3)} E_2(y) dy. \end{aligned} \quad (31)$$

Из этого следует

$$Q_1^{(+)} = A^{(+)} + k_0^2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{1}{b\gamma_{10} i\pi\omega\mu_0} \int_Q \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_1^{(2)} y_3} E_2(y) dy. \quad (32)$$

Мы предполагаем, что коэффициент  $Q_1^{(+)}$  известен из эксперимента.

Таким образом, мы имеем

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 = \frac{C}{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}, \quad (33)$$

где

$$C = \frac{i\pi\omega\mu_0 b\gamma_{10} (Q_1^{(+)} - A^{(+)})}{k_0^2}; \quad (34)$$

$$\mathbf{f} = e_2 \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} y_3}, \quad (35)$$

а скобки обозначают скалярное произведение в пространстве  $L_2(Q)$

$$(\mathbf{E}, \mathbf{f}) = \int_Q \mathbf{E}(y) \overline{\mathbf{f}(y)} dy. \quad (36)$$

### 5 Теорема о существовании и единственности решения интегрального уравнения и обратной краевой задачи

Подставляя (33) и (35) в формулу (30), мы получаем нелинейное объемное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}{C} (\mathbf{E}(x) - \mathbf{E}^0(x)) &= k_0^2 \int_Q \widehat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_Q \widehat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (37)$$

Введем линейный интегральный оператор

$$A_0 \mathbf{E} := k_0^2 \int_Q \widehat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy + \text{grad div} \int_Q \widehat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy. \quad (38)$$

Перепишем уравнение (37) в форме

$$\frac{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}{C} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^0) = A_0 \mathbf{E}. \quad (39)$$

Так как  $\mathbf{E}^0 = \tilde{A}^{(+)} \mathbf{f}$ ,  $\tilde{A}^{(+)} = A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a}$ , то из (39) получаем

$$(\mathbf{E}, \mathbf{f}) (\mathbf{E} - \tilde{A}^{(+)} \mathbf{f}) = C A_0 \mathbf{E} \text{ и, далее, } \tilde{A}^{(+)} \left( \frac{\mathbf{E}}{\tilde{A}^{(+)}} , \mathbf{f} \right) \tilde{A}^{(+)} \left( \frac{\mathbf{E}}{\tilde{A}^{(+)}} - \mathbf{f} \right) = C A_0 \mathbf{E},$$

$$\left( \frac{\mathbf{E}}{\tilde{A}^{(+)}} , \mathbf{f} \right) \left( \frac{\mathbf{E}}{\tilde{A}^{(+)}} - \mathbf{f} \right) = \frac{C}{\tilde{A}^{(+)}} A_0 \frac{\mathbf{E}}{\tilde{A}^{(+)}}. \quad (40)$$

Пусть  $\tilde{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E}}{\tilde{A}^{(+)}}$ ,  $\tilde{C} = \frac{C}{\tilde{A}^{(+)}}$ ,  $\tilde{A}_0 = \tilde{C} A_0$ , тогда из уравнения (40) получаем

$$(\tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{f}) (\tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{f}) = \tilde{A}_0 \tilde{\mathbf{E}}. \quad (41)$$

Положим  $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{f}$ , тогда уравнение (41) преобразуется к виду

$$(\mathbf{U} + \mathbf{f}, \mathbf{f}) \mathbf{U} = \tilde{A}_0 (\mathbf{U} + \mathbf{f}). \quad (42)$$

Из (42) получаем

$$(\mathbf{U}, \mathbf{f}) \mathbf{U} + \|\mathbf{f}\|^2 \mathbf{U} = \tilde{A}_0 \mathbf{U} + \tilde{A}_0 \mathbf{f}. \quad (43)$$

Полагаем  $\mathbf{f}_0 = \tilde{A}_0 \mathbf{f}$ , и из (43) находим

$$\|\mathbf{f}\|^2 \mathbf{U} + (\mathbf{U}, \mathbf{f}) \mathbf{U} = \mathbf{f}_0 + \tilde{A}_0 \mathbf{U}. \quad (44)$$

Приведем последнее уравнение к виду  $A(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$ , необходимому для применения принципа сжимающих отображений:

$$\mathbf{U} = - \left( \mathbf{U}, \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|^2} \right) \mathbf{U} + \frac{\mathbf{f}_0}{\|\mathbf{f}\|^2} + \frac{1}{\|\mathbf{f}\|^2} \tilde{A}_0 \mathbf{U}. \quad (45)$$

Введем обозначения  $\tilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|^2}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}_0 = \frac{\mathbf{f}_0}{\|\mathbf{f}\|^2}$ ,  $\hat{A}_0 = \frac{\tilde{A}_0}{\|\mathbf{f}\|^2}$ , и из (45) получим

$$\mathbf{U} = A(\mathbf{U}) \equiv (-\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{f}}) \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{f}}_0 + \hat{A}_0 \mathbf{U}. \quad (46)$$

Оценим норму оператора  $A(\mathbf{U})$  из (46):

$$\begin{aligned} \|A(\mathbf{U}) - A(\mathbf{V})\| &= \|(-\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{f}}) \mathbf{U} - (-\mathbf{V}, \tilde{\mathbf{f}}) \mathbf{V} + \hat{A}_0 \mathbf{U} - \hat{A}_0 \mathbf{V}\| = \\ &= \|(-\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{f}}) \mathbf{U} - (-\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{f}}) \mathbf{V} + (-\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{f}}) \mathbf{V} - (-\mathbf{V}, \tilde{\mathbf{f}}) \mathbf{V} + \hat{A}_0 (\mathbf{U} - \mathbf{V})\| = \\ &= \|(-\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{f}}) (\mathbf{U} - \mathbf{V}) - (\mathbf{U} - \mathbf{V}, \tilde{\mathbf{f}}) \mathbf{V} + \hat{A}_0 (\mathbf{U} - \mathbf{V})\| = \\ &= \|((- \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{f}}) + \hat{A}_0) (\mathbf{U} - \mathbf{V}) - (\mathbf{U} - \mathbf{V}, \tilde{\mathbf{f}}) \mathbf{V}\|. \end{aligned} \quad (47)$$

Пусть  $\overline{S_r(0)}$  – (замкнутый) шар радиуса  $r$  с центром в точке  $0$  в пространстве  $L_2(Q)$ . Пусть  $\mathbf{U} \in \overline{S_r(0)}$ . Имеем оценку

$$\|A(\mathbf{U})\| \leq (r \|\tilde{\mathbf{f}}\| + \|\hat{A}_0\|) r + \|\tilde{\mathbf{f}}_0\|, \quad \forall \mathbf{U} \in \overline{S_r(0)}. \quad (48)$$

Если

$$(r \|\tilde{\mathbf{f}}\| + \|\hat{A}_0\|) r + \|\tilde{\mathbf{f}}_0\| \leq r, \quad (49)$$

то оператор  $A(\mathbf{U})$  действует из шара  $\overline{S_r(0)}$  в шар  $\overline{S_r(0)}$ .

Теперь, считая, что  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \overline{S_r(0)}$ , и используя неравенство Коши-Буняковского, из (47) получаем

$$\|A(\mathbf{U}) - A(\mathbf{V})\| \leq (2r \|\tilde{\mathbf{f}}\| + \|\hat{A}_0\|) \|\mathbf{U} - \mathbf{V}\|, \quad \forall \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \overline{S_r(0)}. \quad (50)$$

Таким образом, если

$$2r \|\tilde{\mathbf{f}}\| + \|\hat{A}_0\| < 1, \quad (51)$$

то оператор  $A(\mathbf{U})$  является сжимающим. Выберем радиуса шара  $r$  так, чтобы выполнялись оба условия (49) и (51) (ниже будет показано, когда это воз-

можно). Учитывая эквивалентность преобразований при переходе от уравнения (37) к уравнению (46), по теореме о сжимающих отображениях [7] имеем следующий основной результат.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (49) и (51). Тогда существует и единственно решение уравнения (46)  $\mathbf{U} = A(\mathbf{U})$  (и, соответственно, (37)). Также существует и единственно решение обратной краевой задачи, полученное по формуле (33). Кроме того, приближенные решения уравнения (46) могут быть найдены посредством итерационного процесса  $\mathbf{U}_{n+1} = A(\mathbf{U}_n)$ , который сходится для любого начального приближения  $\mathbf{U}_0 \in \overline{S_r(0)}$  со скоростью геометрической прогрессии.

Заметим, что при переходе от неизвестной функции  $\mathbf{U}$  к первоначальной неизвестной функции  $\mathbf{E}$  центр шара (точка 0) перейдет в  $\mathbf{E}^0$ .

Преобразуем оценки (49) и (51) к более удобному виду, соответственно к оценкам:

$$|\tilde{C}| \leq \|\mathbf{f}\|^2 \frac{r - \frac{r^2}{\|\mathbf{f}\|}}{\|A_0\|r + \|A_0\mathbf{f}\|} \equiv F_1(r); \quad (52)$$

$$|\tilde{C}| < \|\mathbf{f}\|^2 \frac{1 - \frac{2r}{\|\mathbf{f}\|}}{\|A_0\|} \equiv F_2(r). \quad (53)$$

Из оценки (53) следует, что необходимо выполнение условия  $0 < r < \frac{\|\mathbf{f}\|}{2}$ . Выберем радиус  $r$  так, чтобы в наибольшей степени ослабить оценку для  $|\tilde{C}|$ . Для этого надо найти величину  $F = \max_{0 \leq r \leq \frac{\|\mathbf{f}\|}{2}} \min\{F_1(r), F_2(r)\}$ .

Легко проверить, что на отрезке  $0 \leq r \leq \frac{\|\mathbf{f}\|}{2}$  функция  $F_2(r)$  является неотрицательной и убывающей, а функция  $F_1(r)$  является неотрицательной и имеет максимум в точке  $r_*$ ,  $0 < r_* < \frac{\|\mathbf{f}\|}{2}$ , где

$$r_* = \left( \frac{\|A_0\mathbf{f}\|^2}{\|A_0\|^2} + \frac{\|A_0\mathbf{f}\|\|\mathbf{f}\|}{\|A_0\|} \right)^{1/2} - \frac{\|A_0\mathbf{f}\|}{\|A_0\|}. \quad (54)$$

Кроме того, точка  $r_*$  является (единственной) точкой пересечения графиков функций  $F_1(r)$  и  $F_2(r)$ . Таким образом,  $F = \|\mathbf{f}\|^2 \frac{1 - \frac{2r_*}{\|\mathbf{f}\|}}{\|A_0\|}$ . Тогда оценки (52) и (53) можно заменить одной оценкой

$$|\tilde{C}| < F \equiv \|\mathbf{f}\|^2 \frac{1 - \frac{2r_*}{\|\mathbf{f}\|}}{\|A_0\|}. \quad (55)$$

Переформулируем теорему 3 в первоначальных неизвестных.

**Теорема 4.** Пусть выполнено условие (55). Тогда существует и единственно решение нелинейного объемного интегрального уравнения (37). Также существует и единственно решение обратной краевой задачи, полученное по формуле (33). Кроме того, приближенное решение уравнения (37) может быть найдено посредством итерационного процесса

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n - \frac{1}{\tilde{A}^{(+)} \|\mathbf{f}\|^2} \left\{ (\mathbf{E}_n, \mathbf{f}) (\mathbf{E}_n - \mathbf{E}^0) + C(A_0 \mathbf{E}_n) \right\}, \quad (56)$$

который сходится для любого начального приближения  $\mathbf{E}_0 \in \overline{S_{r_*}(\mathbf{E}^0)}$  со скоростью геометрической прогрессии, где  $r_*$  определяется формулой (54).

Условие (55) имеет место, если величина  $|Q_1^{(+)} - A^{(+)}|$  достаточно мала. С физической точки зрения это означает, что амплитуда прошедшей волны не сильно отличается от амплитуды падающей волны.

#### 6 Итерационный метод для решения обратной краевой задачи

Рассмотрим схему итерационного процесса (56) для решения нелинейного интегрального уравнения (37). При  $n = 0, 1, \dots$  на каждом шаге необходимо (численно) вычислять действие линейного объемного сингулярного интегрального оператора  $A_0$ . Алгоритм вычислений описан в работе [3]. Алгоритм суммирования рядов представлен в работах [2, 6]. В качестве начального приближения естественно взять  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}^0$ . После решения уравнения (37) с заданной точностью с помощью итерационной процедуры (56) по формулам (33)–(35) находим неизвестную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$ .

#### Список литературы

1. **Shestopalov, Yu. V.** Volume singular integral equation method for determination of effective permittivity of meta-and nano-materials / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, V. V. Yakovlev // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS'2008). – Cambridge, MA. – 2008. – July 2–6. – P. 291–292.
2. **Смирнов, Ю. Г.** Применение ГРИД-технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 3. – С. 39–55.
3. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М.: Радио и Связь, 1998.
4. **Медведик, М. Ю.** Применение ГРИД-технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 2–14.

5. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : ИПРЖР, 1996.
6. **Михлин, С. Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С. Г. Михлин. – М. : Физматгиз, 1962.
7. **Треногин, В. А.** Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1993.

---

**Смирнов Юрий Геннадьевич**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
математики и суперкомпьютерного  
моделирования,  
Пензенский государственный  
университет

**Smirnov Yury Gennadyevich**

Doctor of Science (in Mathematics),  
professor, head of sub-department  
of mathematics and supercomputer  
modeling, Penza State University

---

УДК 517.6+537.874.6

**Смирнов, Ю. Г.**

**О существовании и единственности решений обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 11–24.**

## ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЛАПЛАСОВЫХ ПОЛЕЙ

*Аннотация.* В работе рассматриваются оптимальные по порядку методы аппроксимации лапласовых векторных полей. Для этого исследована гладкость лапласовых векторных полей. Введены классы функций  $\bar{B}_{\alpha,1}(\Omega, M)$ ,  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ,  $M = \text{const}$ . Вычислены поперечники Колмогорова и Бабенко для этих классов функций. Построены локальные сплайны и показано, что данные сплайны являются оптимальными по порядку методами аппроксимации лапласовых полей.

*Ключевые слова:* лапласовы векторные поля, эллиптические уравнения, сплайны, поперечники Колмогорова и Бабенко, прямые задачи гравиразведки.

*Abstract.* In the paper considered optimal with respect to accuracy methods for approximation Laplace vector fields. For this purpose the smooth Laplace vector fields is investigated. Introduced the new functional class  $\bar{B}_{\alpha,1}(\Omega, M)$ ,  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ,  $M = \text{const}$ . Evaluated Kolmogorov widths and Babenko widths for this class of functions. Constructed local splines and shown that this splines are optimal with respect to accuracy methods for approximation Laplace fields.

*Keywords:* Laplace vector fields, elliptic equations, spline, Kolmogorov and Babenko widths, direct problems of gravity.

### Введение

В монографии [1, с. 31] дано определение лапласова векторного поля. Там же отмечено, что лапласово векторное поле, определенное в области  $D$ , удовлетворяет в этой области векторному уравнению Лапласа  $\Delta F = 0$ .

Если  $F$  – потенциальное в области  $D$  поле, удовлетворяющее уравнениям  $\text{div}F = q$ ,  $\text{rot}F = 0$ ,  $r \in D$ , то справедливы формулы [1]

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (n \cdot F) \text{grad} \frac{1}{|r-r'|} + [n \times F] \times \text{grad} \frac{1}{|r-r'|} \right\} ds + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \text{div}F \cdot \text{grad} \frac{1}{|r-r'|} d\vartheta = \begin{cases} F(r'), r' \in D, \\ 0, r' \notin D; \end{cases} \\ & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \left( n \cdot \text{grad} \frac{1}{|r-r'|} \right) F + \left[ n \times \text{grad} \frac{1}{|r-r'|} \right] \times F \right\} ds + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \text{div}F \cdot \text{grad} \frac{1}{|r-r'|} d\vartheta = \begin{cases} F(r'), r' \in D, \\ 0, r' \notin D. \end{cases} \end{aligned}$$

Для лапласова векторного поля справедливы формулы

$$F(r') = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (n \cdot F) \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} + [n \times F] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} \right\} ds; \quad (1)$$

$$F(r') = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \left( n \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} \right) F + \left[ n \times \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} \right] \times F \right\} ds. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) дают решение векторного уравнения Лапласа  $\Delta F = 0$  в области  $D$ , ограниченной поверхностью Ляпунова  $S$ . Поэтому представляет значительный интерес построение оптимальных методов аппроксимации векторной функции  $F(r')$  в области  $D$  и построение оптимальных методов вычисления интегралов типа Коши.

Данная работа посвящена оптимальным методам аппроксимации потенциальных полей  $F(r')$ , представимых формулами (1) и (2). С этой целью исследована гладкость функции  $F(r')$  в предположении, что  $F(r)$  на поверхности  $S$  принадлежит классу функций Гельдера  $H_\alpha$ , а  $S$  – поверхность Ляпунова. Будет показано, что  $F(r') \in \bar{B}_{\alpha,0,\gamma}(D,M)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$ ,  $M$  – константа при  $\gamma = 1$ . Для класса функций  $\bar{B}_{\alpha,0,1}(D,M)$  вычислены поперечники Бабенко и Колмогорова и построены локальные сплайны, являющиеся наилучшим по порядку методом приближения функций из множества  $\bar{B}_{\alpha,0,1}(D,M)$ .

Напомним определения поперечников Бабенко и Колмогорова.

Пусть  $B$  – банахово пространство,  $X \subset B$  – компакт,  $\Pi: X \rightarrow \bar{X}$  – представление компакта конечномерным пространством  $\bar{X}$ .

**Определение 1.** Пусть  $L^n$  – множество  $n$ -мерных линейных подпространств пространства  $B$ . Выражение

$$d_n(X, B) = \inf_{L^n} \sup_{x \in X} \inf_{u \in L^n} \|x - u\|,$$

где последний  $\inf$  берется по всем подпространствам  $L^n$  размерности  $n$ , определяет  $n$ -поперечник Колмогорова.

**Определение 2.** Пусть  $X \in R^n$ . Выражение

$$\delta_n(X) = \inf_{(\Pi: X \rightarrow R^n)} \sup_{x \in X} \operatorname{diam} \Pi^{-1}\Pi(x),$$

где  $\inf$  берется по всем непрерывным отображениям  $\Pi: X \rightarrow R^n$ , определяет  $n$ -поперечник Бабенко.

Опишем классы функций, используемые в работе.

**Определение 3.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ,  $r = 1, 2, \dots$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ . Функция  $f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_l)$  принадлежит классу функций  $B_{r\gamma}(\Omega, M)$ , если выполнены условия

$$\|f(x)\|_{C(\Omega)} \leq M;$$

$$\max_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial^{|\nu|} f(x)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}} \right| \leq M^{|\nu|} |\nu|^{|\nu|}, \quad 1 \leq |\nu| \leq r;$$

$$\left| \frac{\partial^{|\nu|} f(x)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}} \right| \leq \frac{M^{|\nu|} |\nu|^{|\nu|}}{(d(x, \Gamma))^{|\nu| - r - 1 + \gamma}}, \quad r < |\nu| < \infty,$$

здесь  $x = (x_1, \dots, x_l)$ ,  $d(x, \Gamma)$  – расстояние от точки  $x$  до границы  $\Gamma$  области  $D$ , определяемое формулой  $d(x, \Gamma) = \min_{1 \leq i \leq l} \min(|1 + x_i|, |1 - x_i|)$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ ,  $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ ,  $\nu_i$  – целые неотрицательные числа,  $i = 1, 2, 3$ .

**Определение 4.** Пусть  $D = [-1, 1]^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Множество  $\bar{B}_{\alpha, 0, \gamma}(D, M)$  состоит из функций  $f(x_1, \dots, x_l)$ , удовлетворяющих следующим условиям:

$$|f(x_1, \dots, x_l)| \leq M, \quad x \in D,$$

$$f(x) \in H_{\alpha, \dots, \alpha}(M), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in D,$$

$$\left| \frac{\partial^{|\nu|} f(x_1, \dots, x_l)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}} \right| \leq \frac{M^{|\nu|} |\nu|^{|\nu|}}{(d(x, \Gamma))^{|\nu| - 1 + \gamma}} (1 + |\ln(d(x, \Gamma))|), \quad |\nu| = 1, 2, \dots$$

### 1 Гладкость лапласовых полей

Рассмотрим функцию

$$F(r') = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (n \cdot F(r)) \operatorname{grad} \frac{1}{|r - r'|} + [n \times F(r)] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|r - r'|} \right\} ds, \quad (3)$$

где  $F = \operatorname{grad} U = \{f_1, f_2, f_3\}$ ;  $U$  – потенциальное поле;  $S$  – поверхность Ляпунова, ограничивающая область  $D$ ;  $n = \{n_1, n_2, n_3\}$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$ ;  $r = (x, y, z)$  – точка, пробегающая поверхность  $S$ ;  $r' = (x', y', z')$  – точка, лежащая внутри области  $D$ ,  $\operatorname{grad} \frac{1}{|r - r'|} = \{g_1, g_2, g_3\}$  – вектор-функция градиента.

Преобразуем выражение (3). Для этого, воспользовавшись формулой

$$[a \times b] \times c = b(a \cdot c) - a(b \cdot c),$$

получаем

$$\tilde{F}(r') = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (n_1(r)f_1(r) + n_2(r)f_2(r) + n_3(r)f_3(r)) \operatorname{grad} \frac{1}{|r - r'|} + \right.$$

$$\left. + F(r)(n_1(r)g_1(r) + n_2(r)g_2(r) + n_3(r)g_3(r)) - \right.$$

$$-n(r)(f_1(r)g_1(r) + f_2(r)g_2(r) + f_3(r)g_3(r))\} ds. \quad (4)$$

Так как  $F(r)$ ,  $n(r)$ ,  $\text{grad} \frac{1}{|r-r'|}$  – вектор-функции, содержащие по три компоненты, то равенство (4) можно представить в скалярном виде тремя равенствами:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(r') = & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \{(n_1(r)f_1(r) + n_2(r)f_2(r) + n_3(r)f_3(r))g_i(r, r') + \\ & + f_i(r)(n_1(r)g_1(r) + n_2(r)g_2(r) + n_3(r)g_3(r)) - \\ & - n_i(r)(f_1(r)g_1(r) + f_2(r)g_2(r) + f_3(r)g_3(r))\} ds, i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем предполагать, что функции  $f_i(x, y, z)$ ,  $i = 1, 2, 3$  являются кусочно-постоянными. Из предположения гладкости поверхности  $S$  следует, что функции  $n_i(x, y, z)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , определяющие проекции единичного нормального вектора в точке  $(x, y, z) \in S$ , удовлетворяют условию Гельдера с показателем  $\alpha$ .

В этом случае поверхностные интегралы, входящие в равенства (5), распадаются на сумму поверхностных интегралов вида

$$\iint_S P_{ij}(r)g_1(r, r')ds, \iint_S P_{ij}(r)g_2(r, r')ds, \iint_S P_{ij}(r)g_3(r, r')ds, \quad (6)$$

где функции  $P_{ij}(r)$  – кусочно-непрерывные и имеют вид

$$P_{ij}(r) = n_i f_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Вследствие этого нам достаточно будет рассмотреть следующую функцию:

$$\varphi(r') = \iint_S P(r)g_1(r, r')ds, \quad (7)$$

где  $P(r)$  – кусочно-постоянная функция.

Остальные интегралы рассматриваются аналогично.

Оценим производные функции (7). Очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^v \varphi(x', y', z')}{\partial x'^v} &= \frac{\partial^v}{\partial x'^v} \iint_S P(x, y, z)g_1(\{x, y, z\}, \{x', y', z'\}) ds = \\ &= \iint_S P(x, y, z) \frac{\partial^v}{\partial x'^v} \left[ \frac{x' - x}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} \right] ds, \quad v \geq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Введем следующее обозначение:  $\tau = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ . Тогда

$$\frac{\partial^{\nu} g_1(\{x, y, z\}, \{x', y', z'\})}{\partial x^{\nu}} = (2\nu + 1)!! \times$$

$$\times \begin{cases} \left( \frac{A_1(x'-x)^{\nu+1}}{\tau^{\nu+3/2}} + \frac{A_2(x'-x)^{\nu-1}}{\tau^{\nu-1+3/2}} + \frac{A_3(x'-x)^{\nu-3}}{\tau^{\nu-2+3/2}} + \dots + \frac{A_N(x'-x)}{\tau^{(\nu+3)/2}} \right), \nu - \text{четное,} \\ \left( \frac{A_1^*(x'-x)^{\nu+1}}{\tau^{\nu+3/2}} + \frac{A_2^*(x'-x)^{\nu-1}}{\tau^{\nu-1+3/2}} + \frac{A_3^*(x'-x)^{\nu-3}}{\tau^{\nu-2+3/2}} + \dots + \frac{A_N^*(x'-x)^0}{\tau^{(\nu+2)/2}} \right), \nu - \text{нечетное,} \end{cases}$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_N; A_1^*, A_2^*, \dots, A_N^* = \text{const}, \nu \geq 1$ .

Последнее равенство можно представить в виде

$$\frac{\partial^{\nu} g_1(\{x, y, z\}, \{x', y', z'\})}{\partial x^{\nu}} = (2\nu + 1)!! \sum_{i=0}^N \frac{A_i(x'-x)^{\nu-2i+1}}{\tau^{\nu-i+3/2}}, \nu \geq 1,$$

$N = \frac{\nu+1}{2}$  – при  $\nu$  нечетном,  $N = \frac{\nu}{2}$  – при  $\nu$  четном.

Тогда равенство (8) представимо в виде

$$\left| \frac{\partial^{\nu} \varphi(x', y', z')}{\partial x^{\nu}} \right| = \left| \iint_S P(x, y, z) \frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}} [g_1(\{x, y, z\}, \{x', y', z'\})] ds \right| \leq$$

$$\leq (2\nu + 1)!! \left( \sum_{i=0}^N \iint_S \frac{P(x, y, z) A_i(x'-x)^{\nu-2i+1}}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{\nu-i+3/2}} ds \right). \quad (9)$$

В формуле (9) рассмотрим последнее слагаемое при  $\nu$  нечетном,

$$i = N = \frac{\nu+1}{2},$$

$$\left| \iint_S \frac{P(x, y, z) A_N^*}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{(\nu+2)/2}} ds \right| \leq \frac{|A_N^*|}{(d((x', y', z'), \Gamma))^{\nu}} \times$$

$$\times \left| \iint_S \frac{P(x, y, z) ds}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \right|.$$

Оценим отдельно интеграл

$$\iint_S \frac{P(x, y, z) ds}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \quad (10)$$

учитывая, что для функции  $P(x, y, z)$  справедливо неравенство

$$|P(x, y, z)| \leq \tilde{M}, \quad \tilde{M} = \text{const}.$$

Пусть  $S$  – прямоугольник  $[a, b; c, d]$ , лежащий в плоскости  $XOY$ . Положим  $y' = 0, x' = 0, a = -b, c = -d$ . Тогда расстояние от точки  $(x', y', z')$  до  $S$  равно  $z'$ . Используя известные табличные интегралы

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a + x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{a + x^2} \right| + C$$

и учитывая, что функция  $f(x) = \text{arctg}(x)$  является нечетной и для нее справедливо неравенство  $|\text{arctg}(x)| \leq \frac{\pi}{2}$ , получим

$$\begin{aligned} \left| \iint_S \frac{P(x, y, z) ds}{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \right| &\leq \tilde{M} \left| \iint_{ac}^{bd} \frac{dy dx}{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z'^2} \right| = \\ &= \tilde{M} \left| \int_{-b-d}^b \int \frac{dy dx}{(x^2 + y^2 + z'^2)} \right| = \\ &= \tilde{M} \left| \int_{-b}^b \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + z'^2}} \left[ \text{arctg} \frac{d}{\sqrt{x^2 + z'^2}} - \text{arctg} \frac{-d}{\sqrt{x^2 + z'^2}} \right] \right) dx \right| = \\ &= 2\tilde{M} \left| \int_{-b}^b \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + z'^2}} \left[ \text{arctg} \frac{d}{\sqrt{x^2 + z'^2}} \right] \right) dx \right| \leq \tilde{M} \pi \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{x^2 + z'^2}} dx = \\ &= \tilde{M} \pi \ln \left| x + \sqrt{x^2 + z'^2} \right| \Big|_{-b}^b \leq B \left( 1 + \left| \ln(d((x', y', z'), \Gamma)) \right| \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь и всюду ниже через  $B$  обозначаются константы, конкретные значения которых не вычисляются.

Оценим теперь интеграл (10) в случае, когда поверхность  $S$  выпуклая. Пусть точка  $(x^*, y^*, z^*)$  реализует расстояние от точки  $(x', y', z')$  до поверхности  $S$ , равное  $h$ . Построим сферу  $S((x', y', z'), 2h)$  радиуса  $2h$  с центром в точке  $(x', y', z')$  (естественно рассматривается случай достаточно малых значений  $h$ ). Тогда поверхность  $S$  разбивается на две части: поверхность  $S_1$ , расположенную внутри сферы  $S((x', y', z'), 2h)$ , и на поверхность  $S_2$ , расположенную вне этой сферы.

Оценим в отдельности интегралы

$$\iint_{S_i} \frac{P(x, y, z) ds}{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad i = 1, 2.$$

Так как по предположению функция  $P(x, y, z)$  кусочно-непрерывная, то существует  $\tilde{M} = \sup_S |P(x, y, z)|$ .

Проведем через точку  $(x^*, y^*, z^*)$  плоскость, касательную к поверхности  $S_1$ , и спроектируем на касательную плоскость поверхность  $S_1$ , проекцию обозначим через  $S_1^*$ . Так как значение  $h$  достаточно, то имеется взаимнооднозначное соответствие между поверхностями  $S_1$  и  $S_1^*$ . Обозначим через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  площади поверхностей  $S_1$  и  $S_1^*$ . Тогда

$$\left| \iint_{S_1} \frac{P(x, y, z) ds}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \right| \leq \\ \leq \tilde{M} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \iint_{S_1^*} \frac{ds}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \leq B(1 + |\ln h|).$$

Оценим теперь интеграл

$$\iint_{S_2} \frac{P(x, y, z) ds}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Покажем, что этот интеграл также ограничен величиной  $B(1 + |\ln h|)$ . Для этого воспользуемся плоскостью, касательной к поверхности  $S$  в точке  $(x^*, y^*, z^*)$  (плоскость  $n_1$ ). Построим цилиндрическую поверхность, перпендикулярную к этой плоскости, в которую вписана область  $D$ . Пусть  $l$  – кривая касания поверхности  $S$  с цилиндром. Так как область  $D$  выпуклая, то такая кривая существует. Обозначим через  $S_H$  часть поверхности, расположенную под кривой  $l$ . Отметим, что  $S_H$  не зависит от  $h$ . Обозначим через  $H$  расстояние от точки  $(x', y', z')$  до кривой  $l$ . Это расстояние также не зависит от  $h$ . Спроектируем поверхность  $S_H \setminus S_1$  на плоскость, проходящую через точку  $(x', y', z')$  и параллельную касательной плоскости к поверхности  $S$  в точке  $(x^*, y^*, z^*)$  (плоскость  $n_2$ ). Обозначим проекцию через  $G_H^*$ . Тогда

$$\left| \iint_{S_2} \frac{P(x, y, z) ds}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \right| \leq \tilde{M} \iint_{S_2} \frac{ds}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \\ = \tilde{M} \iint_{S_2 \setminus S_H} \frac{ds}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} + \tilde{M} \iint_{S_H \setminus S_1} \frac{ds}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \leq \\ \leq \frac{\tilde{M}}{H^2} \iint_{S_2 \setminus S_H} ds + \tilde{M} \iint_{G_H^*} \frac{dxdy}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Здесь  $\gamma$  определяется углом наклона нормали к поверхности  $S_H \setminus S_1$  и нормалью к касательной плоскости  $n_2$ . В качестве  $\gamma$  выбирается наибольший коэффициент, равный 1.

Оценим последний интеграл. Пусть  $\rho_0$  – радиус наибольшего круга с центром в точке  $(x', y', z')$ , вписанного в область  $G_H^*$ . Очевидно,  $\rho_0 = Bh$ . Пусть  $R_0$  – радиус наименьшего круга с центром в точке  $(x', y', z')$ , описанного вокруг области  $G_H^*$ . Очевидно,  $R_0 = BH$ .

Тогда

$$\begin{aligned} & \iint_{G_H^*} \frac{dxdy}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \iint_{G_H^*} \frac{dxdy}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \leq \\ & \leq \iint_{B((x',y',z'),R_0) \setminus B((x',y',z'),\rho_0)} \frac{dxdy}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \leq \int_0^{2\pi} \int_{\rho_0}^{R_0} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^2} = B(\ln R_0 - \ln \rho_0) = \\ & = B|\ln R_0 - \ln \rho_0| \leq B(|\ln R_0| + |\ln \rho_0|) \leq B(1 + |\ln h|). \end{aligned}$$

В результате получим

$$\left| \iint_{S_2} \frac{P(x, y, z) ds}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \right| \leq B(1 + |\ln h|).$$

Таким образом, получена оценка для интеграла (10), и в случае, когда поверхность  $S$  выпуклая, эта оценка совпадает с (11).

Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \iint_S \frac{P(x, y, z) A_N^*}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{\frac{\nu+2}{2}}} ds \right| \leq \\ & \leq \frac{|A_N^*| B}{d((x', y', z'), \Gamma)^\nu} \left( 1 + |\ln(d((x', y', z'), \Gamma))| \right) \leq \\ & \leq \frac{B}{d((x', y', z'), \Gamma)^\nu} \left( 1 + |\ln(d((x', y', z'), \Gamma))| \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим интеграл

$$\iint_S \frac{P(x, y, z)(x'-x)^k}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{\frac{\nu+2+k}{2}}}, \quad (13)$$

который представляет собой общий вид интегралов, входящих в (9), при любом  $\nu$  (четном и нечетном),  $k = \nu + 1 - 2i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Для получения необходимой нам оценки используем формулу (12):

$$\begin{aligned}
 & \left| \iint_S \frac{P(x, y, z)(x' - x)^k ds}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{\frac{\nu+2+k}{2}}} \right| \leq \\
 & \leq \iint_S \frac{|P(x, y, z)| |(x' - x)^k|}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{\frac{\nu+2+k}{2}}} ds = \\
 & = \iint_S \frac{|P(x, y, z)| \left( (x' - x)^2 \right)^{k/2} ds}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{\frac{\nu+2+k}{2}}} \leq \\
 & \leq \iint_S \frac{|P(x, y, z)| \left( (x' - x)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{k/2} ds}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{\frac{\nu+2+k}{2}}} = \\
 & = \iint_S \frac{|P(x, y, z)| ds}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{\frac{\nu+2}{2}}} \leq \\
 & \leq \frac{B}{d((x', y', z'), \Gamma)^\nu} \left( 1 + \left| \ln(d((x', y', z'), \Gamma)) \right| \right).
 \end{aligned}$$

Число слагаемых в  $\frac{\partial^\nu g_1(\{x, y, z\}, \{x', y', z'\})}{\partial x'^\nu}$  будет составлять  $\nu/2 + 1$

в случае, когда  $\nu$  четное, и  $(\nu + 1)/2 + 1$  в случае, когда  $\nu$  нечетное.

Но так как при любом  $\nu$  число слагаемых не будет превышать  $2\nu$ , то получим

$$\left| \frac{\partial^\nu \varphi(x', y', z')}{\partial x'^\nu} \right| \leq \frac{B\nu(2\nu+1)!!}{d((x', y', z'), \Gamma)^\nu} \left( 1 + \left| \ln(d((x', y', z'), \Gamma)) \right| \right), \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (14)$$

В связи с несимметричностью функции  $\varphi(x', y', z')$  относительно переменных  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  оценим частные производные функции по переменной  $y'$ :

$$\frac{\partial^\nu g_1(\{x, y, z\}, \{x', y', z'\})}{\partial y'^\nu} = (2\nu + 1)!! (x' - x) \times$$

$$\times \begin{cases} \left( \frac{A_1(y-y')^{\nu}}{\tau^{\nu+3/2}} + \frac{A_2(y-y')^{\nu-2}}{\tau^{\nu+3/2-1}} + \frac{A_3(y-y')^{\nu-4}}{\tau^{\nu+3/2-2}} + \dots + \frac{A_N(y-y')^0}{\tau^{(\nu+3)/2}} \right), \nu - \text{четное,} \\ \left( \frac{A_N^*(y-y')^{\nu}}{\tau^{\nu+3/2}} + \frac{A_2^*(y-y')^{\nu-2}}{\tau^{\nu+3/2-1}} + \frac{A_3^*(y-y')^{\nu-4}}{\tau^{\nu+3/2-2}} + \dots + \frac{A_N^*(y-y')}{\tau^{(\nu+4)/2}} \right), \nu - \text{нечетное,} \end{cases}$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_N, A_1^*, A_2^*, \dots, A_N^* = \text{const}$ ;  $N = \frac{\nu-1}{2}$  при  $\nu$  нечетном,  $N = \frac{\nu}{2}$  при  $\nu$  четном.

Последнее равенство можно представить в виде

$$\frac{\partial^{\nu} g_1(\{x, y, z\}, \{x', y', z'\})}{\partial y'^{\nu}} = (2\nu+1)!! (x'-x) \sum_{i=0}^N \frac{A_i(y-y')^{\nu-2i}}{\tau^{\nu+3/2-i}},$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{\nu} \varphi(x', y', z')}{\partial y'^{\nu}} \right| &= \left| \iint_S P(x, y, z) \frac{\partial^{\nu}}{\partial y'^{\nu}} [g_1(\{x, y, z\}, \{x', y', z'\})] ds \right| \leq \\ &\leq (2\nu+1)!! \left( \sum_{i=0}^N \iint_S \frac{P(x, y, z) A_i (y-y')^{\nu-2i} (x'-x)}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{\frac{3}{2} + \nu - i}} ds \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим интеграл

$$\iint_S \frac{P(x, y, z) (x'-x) (y-y')^k}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{\frac{\nu+3+k}{2}}}, \quad (16)$$

который представляет собой общий вид интегралов, входящих в (15), при любом  $\nu$  (четном и нечетном),  $k = \nu - 2i, i = 0 \dots N$ . Для получения необходимой нам оценки используем формулу (12):

$$\begin{aligned} &\left| \iint_S \frac{P(x, y, z) (x'-x) (y-y')^k}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{\frac{\nu+3+k}{2}}} \right| \leq \\ &\leq \iint_S \frac{|P(x, y, z)| |(x'-x)| |(y-y')^k|}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{\frac{\nu+3+k}{2}}} ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S \frac{|P(x, y, z)| \left( (x' - x)^2 \right)^{1/2} \left( (y - y')^2 \right)^{k/2} ds}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{\frac{\nu+3+k}{2}}} \leq \\
&\leq \iint_S \frac{|P(x, y, z)| \left( (x' - x)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{\frac{k}{2}} ds}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{\frac{\nu+3+k}{2}}} = \\
&= \iint_S \frac{|P(x, y, z)| ds}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{\frac{\nu+2}{2}}} \leq \\
&\leq \frac{B}{d((x', y', z'), \Gamma)^\nu} \left( 1 + \left| \ln(d((x', y', z'), \Gamma)) \right| \right).
\end{aligned}$$

Число слагаемых в  $\frac{\partial^\nu g_1(\{x, y, z\}, \{x', y', z'\})}{\partial y^\nu}$  будет составлять  $\nu/2 + 1$  в случае, когда  $\nu$  четное, и  $(\nu - 1)/2 + 1$  в случае, когда  $\nu$  нечетное.

Но так как при любом  $\nu$  число слагаемых не будет превышать  $\nu$ , то получим

$$\left| \frac{\partial^\nu \varphi(x', y', z')}{\partial y^\nu} \right| \leq \frac{B\nu(2\nu+1)!!}{d((x', y', z'), \Gamma)^\nu} \left( 1 + \left| \ln(d((x', y', z'), \Gamma)) \right| \right), \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Аналогичным образом вычисляется и оценивается частная производная

$$\left| \frac{\partial^\nu \varphi(x', y', z')}{\partial z^\nu} \right| \leq \frac{B\nu(2\nu+1)!!}{d((x', y', z'), \Gamma)^\nu} \left( 1 + \left| \ln(d((x', y', z'), \Gamma)) \right| \right), \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Рассмотрим смешанную производную:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 \varphi(x', y', z')}{\partial x' \partial y'} \right| &= \left| \iint_S P(x, y, z) \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} [g_1(\{x, y, z\}, \{x', y', z'\})] ds \right| \leq \\
&\leq 3 \iint_S \frac{|P(x, y, z)| |y - y'|}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{5/2}} ds + \\
&+ 15 \iint_S \frac{|P(x, y, z)| |y - y'| (x' - x)^2}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{7/2}} ds \leq \\
&\leq 3 \iint_S \frac{|P(x, y, z)| |y - y'|}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{5/2}} ds +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +15 \iint_S \frac{|P(x, y, z)| |y - y'| \left( (x' - x)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{7/2}} ds \leq \\
 & \leq 3 \iint_S \frac{|P(x, y, z)| |y - y'|}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{5/2}} ds + \\
 & +15 \iint_S \frac{|P(x, y, z)| |y - y'|}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{5/2}} ds = \\
 & = 18 \iint_S \frac{|P(x, y, z)| |y - y'|}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{5/2}} ds \leq \\
 & \leq \frac{18}{(d((x', y', z'), \Gamma))^2} \cdot \iint_S \frac{|P(x, y, z)| \left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{1/2}}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} ds \leq \\
 & \leq \frac{18}{(d((x', y', z'), \Gamma))^2} \cdot \iint_S \frac{|P(x, y, z)|}{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} ds \leq \frac{18B}{(d((x', y', z'), \Gamma))^2} \times \\
 & \times (1 + |\ln(d((x', y', z'), \Gamma))|) \leq \frac{2 \cdot 5!! B}{(d((x', y', z'), \Gamma))^2} (1 + |\ln(d((x', y', z'), \Gamma))|).
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\left| \frac{\partial^{|\nu|} \varphi(x', y', z')}{\partial x'^{\nu_1} \partial y'^{\nu_2} \partial z'^{\nu_3}} \right| \leq \frac{B |\nu| (2|\nu| + 1)!!}{d((x', y', z'), \Gamma)^{|\nu|}} (1 + |\ln(d((x', y', z'), \Gamma))|), \quad |\nu| = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Заметим, что при  $d((x', y', z'), \Gamma) > 1$  указанную оценку можно уточнить.

Оценим интеграл

$$\begin{aligned}
 & \left| \iint_S \frac{P(x, y, z) A_N^*}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{(v+2)/2}} ds \right| \leq \frac{|A_N^*| B}{d((x', y', z'), \Gamma)^{(v+2)/2}} \iint_S ds \leq \\
 & \leq \frac{B}{d((x', y', z'), \Gamma)^{(v+2)/2}}.
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом рассматривая общие виды интегралов, входящих в (9) и (15), получим следующую оценку:

$$\left| \frac{\partial^{|\nu|} \varphi(x', y', z')}{\partial x'^{\nu_1} \partial y'^{\nu_2} \partial z'^{\nu_3}} \right| \leq \frac{B |\nu| (2|\nu| + 1)!!}{(d((x', y', z'), \Gamma))^{\frac{(|\nu| + 2)}{2}}}, \quad d((x', y', z'), \Gamma) > 1, \quad |\nu| = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть функции  $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)$  являются кусочно-постоянными. Тогда вектор-функция

$$\tilde{F}(x', y', z') = \{\tilde{f}_1(x', y', z'), \tilde{f}_2(x', y', z'), \tilde{f}_3(x', y', z')\},$$

определяемая равенством (3), имеет счетное множество частных производных, для которых выполняются неравенства

$$\left| \frac{\partial^{|\nu|} \tilde{f}_i(x', y', z')}{\partial x'^{\nu_1} \partial y'^{\nu_2} \partial z'^{\nu_3}} \right| \leq \begin{cases} M, \nu = 0, \\ \frac{M |\nu| (2|\nu| + 1)!! (1 + |\ln(d((x', y', z'), \Gamma))|)}{[d((x', y', z'), \Gamma)]^{|\nu|}}, d((x', y', z'), \Gamma) \leq 1, |\nu| \geq 1, \\ \frac{M |\nu| (2|\nu| + 1)!!}{[d((x', y', z'), \Gamma)]^{\frac{(\nu+2)}{2}}}, d((x', y', z'), \Gamma) > 1, |\nu| \geq 1, \end{cases} \quad (21)$$

где  $i = 1, 2, 3$ ,  $d((x', y', z'), \Gamma)$  – расстояние точки  $(x', y', z')$  до границы  $\Gamma$  области  $D$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ ,  $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ ,  $M = \text{const}$ .

При построении оптимальных методов аппроксимации лапласовых полей понадобится следующее утверждение, справедливость которого следует из теоремы А. М. Ляпунова о производных потенциала простого слоя [2, с. 86].

**Теорема 2.** Пусть функции  $f_i(x, y, z)$ ,  $n_i(x, y, z)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $(x, y, z) \in S$  удовлетворяют условию Гельдера с показателем  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) по каждой переменной  $x, y, z$ . Тогда функции  $\tilde{f}_i(x', y', z')$ ,  $(x', y', z') \in D$ ,  $i = 1, 2, 3$  принадлежат классу функций Гельдера с показателем  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ).

## 2 Оптимальные по точности методы аппроксимации

### функций из множества $\bar{B}_{\alpha, 0, 1}(\Omega, M)$ , $\Omega = [-1, 1]^l$

Вначале построим оптимальный метод аппроксимации функций из множества  $\bar{B}_{\alpha, 0, 1}(\Omega, M)$  в предположении, что  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 2, 3, \dots$ , а затем укажем на способ распространения этого алгоритма на трехмерные области  $D$ , ограниченные гладкими поверхностями  $S$ .

Для построения оптимального метода аппроксимации функций из класса  $\bar{B}_{\alpha, 0, 1}(\Omega, M)$  вычислим значения поперечников Бабенко и Колмогорова

для этого класса и построим локальные сплайны, точность которых совпадает с величиной поперечников.

Обозначим через  $\Delta^0$  множество точек  $t$  ( $t = (t_1, \dots, t_l)$ ), расстояние от которых до границы  $\Gamma = \partial\Omega$  области  $\Omega$  удовлетворяет неравенству  $0 \leq d(t, \Gamma) \leq \frac{1}{2^N}$ . Через  $\Delta^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  обозначим множество точек  $t \in \Omega$ , расстояние от которых до границы  $\Gamma$  области  $\Omega$  удовлетворяет неравенству

$$\frac{2^{k-1}}{2^N} \leq d(t, \Gamma) \leq \frac{2^k}{2^N}, k = 1, 2, \dots, N.$$

Каждую из областей  $\Delta^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  покроем более мелкими кубами  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$  с гранями, параллельными координатным плоскостям, и с ребрами, равными

$$h_0 = \frac{1}{2^N}, h_k = \frac{2^k - 2^{k-1}}{2^N}, k = 1, 2, \dots, N.$$

То обстоятельство, что среди кубов  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$  могут при каждом  $k$  встретиться параллелепипеды, у которых длина одного или нескольких ребер меньше или равна  $h_k$ , не влияет на общность рассуждений.

Ниже мы построим два вида локальных сплайнов. Сначала построим локальный сплайн, который может иметь разрывы на гранях кубов  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ . Этот сплайн более удобен при реализации и имеет такую же точность, что и непрерывный сплайн.

Необходимость в построении непрерывного сплайна вызвана двумя обстоятельствами: во-первых, во многих задачах гравиразведки проводится тренд по всей области; во-вторых, для вычисления поперечника Колмогорова необходима аппроксимация непрерывными множествами.

Вначале остановимся на построении необязательно непрерывного сплайна.

При построении необязательно непрерывного локального сплайна, предназначенного для аппроксимации функций из множества  $\bar{B}_{\alpha, 0, 1}(\Omega, M)$ , достаточно ограничиться описанным выше покрытием области  $\Omega$  кубами  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Обозначим через  $L_{s_k, \dots, s_k}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$  интерполяционный полином Лагранжа по  $l$  переменным, использующий при своем построении  $s_k$  узлов полинома Чебышева первого рода по каждой переменной. Здесь

$$s_0 = \lceil \sqrt{M} \rceil + 1, s_k = \left\lceil MN \left( (N-k) \ln^l N \right)^{1/N} \right\rceil + 1, k = 1, 2, \dots, N.$$

Сплайн, составленный из полиномов  $L_{s_k, \dots, s_k}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , обозначим через  $f_{LN}(t)$ . Можно показать, что, как и в случае построенного ниже непрерывного сплайна  $f_N(t)$ ,

$$\|f(t) - f_{LN}(t)\| \leq \frac{B}{2^{N\alpha}}.$$

При построении непрерывного локального сплайна, аппроксимирующего  $f(t) \in \bar{B}_{\alpha, 0, 1}(\Omega, M)$ , нужно произвести покрытие области  $\Omega$  следующим образом. В области  $\Delta^N$  размещается куб  $\Delta^N$ . В области  $\Delta^{N-1}$  размещаются кубы  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-1}$ , грани которых параллельны координатным плоскостям, а длины ребер равны  $h_k$ . При этом вершины куба  $\Delta^N$  входят в множества вершин кубов  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-1}$ . После покрытия области  $\Delta^{N-1}$  кубами  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-1}$  проводится покрытие области  $\Delta^{N-2}$  кубами  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$ . При этом в число вершин кубов  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$  входят вершины кубов  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-1}$ , лежащие на гранях, общих с  $\Delta^{N-2}$ . Этот процесс продолжается до тех пор, пока все области  $\Delta_k$ ,  $k = N-1, N-2, \dots, 1, 0$  не окажутся покрытыми кубами  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ . То обстоятельство, что при этом при каждом значении  $k$  в каждой области  $\Delta^k$  может оказаться конечное число параллелепипедов с гранями, параллельными координатным осям, у которых длина одного или нескольких ребер меньше  $h_k$ , не влияет на общность рассуждений.

Построим интерполяционные полиномы таким образом, чтобы в число узлов интерполяции входили концы сегментов.

Полином  $P_s(f, [a, b])$ , интерполирующий функцию  $f(t) \in \bar{B}_{\alpha, 0, 1}(\Omega, M)$  на сегменте  $[a, b]$ , строится следующим образом.

Обозначим через  $\xi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$  узлы полинома Чебышева первого рода степени  $s$ . Отообразим сегмент  $[\xi_1, \xi_s] \subset [-1, 1]$  на сегмент  $[a, b]$  таким образом, чтобы точки  $\xi_1$  и  $\xi_s$  перешли в точки  $a$  и  $b$  соответственно. Образы точек  $\xi_1, \dots, \xi_s$  на сегменте  $[a, b]$  обозначим через  $\xi_1', \dots, \xi_s'$ . Интерполяционный полином, построенный по узлам  $\xi_1', \dots, \xi_s'$ , обозначим через  $P_s(f, [a, b])$ .

Через  $P_{s, \dots, s}(f, [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l])$  обозначим интерполяционный полином, который определяется формулой

$$P_{s, \dots, s}(f, [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]) = P_s^{t_1} \left[ \dots \left[ P_s^{t_{l-1}} \left[ P_s^{t_l} [f, [a_l, b_l]], [a_{l-1}, b_{l-1}] \right], \dots \right], [a_1, b_1] \right],$$

где полином  $P_s(f, [a, b])$  определен выше, а верхний индекс в выражении  $P_s^{t_i}(f, [a_i, b_i])$  определяет переменную, по которой проводится интерполяция.

Непрерывный локальный сплайн строится следующим образом. В кубе  $\Delta^N$  функция  $f(t)$  аппроксимируется интерполяционным полиномом  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta^N)$ . В каждом из кубов  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-1}$  функция  $f(t)$  аппроксимируется интерполяционным полиномом  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-1})$ , который во всех узлах интерполяции, за исключением расположенных на гранях куба  $\Delta^N$ , принимает значения  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta^N)$ . Построив интерполяционные полиномы  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-1})$ , аналогичным образом строим интерполяционные полиномы  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$ ,  $k = N-2, N-3, \dots, 1, 0$ . Сплайн, составленный из полиномов  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , обозначим через  $f_N(t)$ .

Оценим погрешность аппроксимации. Положим  $s = [2\sigma(N)MN] + 1$ , где  $\sigma(N) = (\ln^l N)^{1/N}$ . Очевидно,

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^0)} \leq B \frac{h_0^\alpha \lambda_s}{s^\alpha} \leq B \left(\frac{1}{2^N}\right)^\alpha \frac{M}{s^\alpha} \leq B \frac{1}{2^{\alpha N}}, \quad (22)$$

где  $\lambda_s$  – константа Лебега.

При  $k = 1, 2, \dots, N$  получим

$$\begin{aligned} \|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)} &\leq B \frac{M^N N^N h_k^N}{s^N} \left(\frac{2^N}{2^k}\right)^N \left(1 + \left|\ln \frac{2^k}{2^N}\right|\right) \lambda_s^l \leq \\ &\leq B \frac{M^N N^N}{s^N} \left(\frac{2^{k+1} - 2^k}{2^N}\right)^N \left(\frac{2^N}{2^k}\right)^N (N-k)(\ln N)^l \leq \\ &B \frac{M^N N^N}{N^N M^N (\ln N)^l} (N-k)(\ln N)^l \leq \frac{B}{2^{\alpha N}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что

$$\|f(t) - f_N(t)\| \leq \frac{B}{2^{\alpha N}}. \quad (24)$$

Оценим число узлов, используемых при построении локального сплайна  $f_N(t)$ . Прежде всего оценим число  $m$  кубов  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Очевидно

$$m \supseteq \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2 - 2 \cdot 2^{k-N}}{2^{k+1-N} - 2^{k-N}}\right)^{l-1} \supseteq \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2 \cdot 2^N - 2 \cdot 2^k}{2^k (2-1)}\right)^{l-1} \supseteq$$

$$\bigcup_{k=0}^{N-1} 2^{N(l-1)} 2^{-k(l-1)} - N \bigcup_{k=0}^{N-1} 2^{N(l-1)}.$$

Так как в каждом кубе используется  $s^l$  узлов сплайна  $f_N(t)$ , то

$$n \bigcup_{k=0}^{N-1} 2^{N(l-1)} s^l \bigcup_{k=0}^{N-1} 2^{N(l-1)} 2^{\alpha l} N^{l/N} N^l (\ln^l N)^{l/N} \bigcup_{k=0}^{N-1} N^l 2^{N(l-1)},$$

и, следовательно,

$$N \bigcup_{k=0}^{N-1} \log_2 n^{1/(l-1)} - \log_2 \log_2^{1/(l-1)} n. \quad (25)$$

Из (24) и (25) имеем

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Omega)} \leq \frac{B}{n^{\alpha/(l-1)}}. \quad (26)$$

При  $\alpha = 1$  оценка (26) имеет вид

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Omega)} \leq \frac{B}{n^{1/(l-1)}}. \quad (27)$$

Заметим, что класс функций  $B_{1,1}(\Omega, M)$  вложен в класс функций  $\bar{B}_{1,0,1}(\Omega, M)$ . Для класса функций  $B_{1,1}(\Omega, M)$  в [3] известна оценка снизу поперечников Бабенко

$$\delta_n(B_{1,1}(\Omega, M)) \geq B n^{-1/(l-1)}.$$

Следовательно,

$$\delta_n(\bar{B}_{1,0,1}(\Omega, M)) \geq B n^{-1/(l-1)}. \quad (28)$$

Из (27), (28) и известного [4] соотношения  $\delta_n(X) \leq 2d_n(X, C)$  приходим к равенству

$$\delta_n(\bar{B}_{1,0,1}(\Omega, M)) \bigcup_{k=0}^{N-1} d_n(\bar{B}_{1,0,1}(\Omega, M), C) \bigcup_{k=0}^{N-1} n^{-1/(l-1)}.$$

Таким образом, описанный выше метод оптимален по порядку при  $\alpha = 1$ .

**Замечание 1.** Можно показать, что метод оптимален по порядку при  $0 < \alpha \leq 1$ .

**Замечание 2.** При использовании равномерной сетки имеем погрешность порядка  $n^{-\alpha/l}$ .

Опишем способ построения локального сплайна в областях, ограниченных поверхностями Ляпунова. Для определенности рассмотрим выпуклую область, ограниченную гладкой поверхностью  $S$ . Обозначим через  $R$  радиус

наибольшей сферы, которую можно вписать в поверхность  $S$ . Пусть  $(x_0, y_0, z_0)$  – центр этой сферы. Обозначим через  $N$  натуральное число. Закроем тело  $D$  в параллелепипед  $G$ . Покроем параллелепипед  $G$  кубами с ребрами, равными  $\frac{R}{2}$ . Назовем  $N$ -отмеченными те кубы, расстояние от кото-

рых до границы  $S$  области  $D$  удовлетворяет неравенствам  $\frac{R}{2} \leq d(t, S) \leq R$ .

Обозначим эти кубы через  $\Delta_i^N$ . Объединение этих кубов составляет первый этап замощения. Покроем параллелепипед  $G$  кубами с ребрами, равными  $\frac{1}{4}R$ . Назовем  $(N-1)$ -отмеченными те кубы, которые не входят в первый

этап замощения и расстояние от которых до границы  $S$  удовлетворяет неравенствам  $\frac{R}{4} \leq d(t, S) \leq \frac{R}{2}$ . Аналогичным образом область  $D$  покрываем кубами с ребрами, равными  $\frac{R}{8}, \dots, \frac{R}{2^N}$ . Кубы, которые вошли в покрытие, назовем

$(N-2, N-3, \dots, 0)$ -покрытиями области  $D$ . Область, являющуюся объединением  $(0, 1, \dots, N)$ -отмеченных кубов, обозначим через  $D^*$ . В каждом из отмеченных кубов  $\Delta_i^k, k=0, 1, \dots, N$  функцию  $f(t)$  аппроксимируем интерполяционным полиномом  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_i^k)$ .

**Замечание 3.** При построении интерполяционных полиномов  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_i^k)$  в узлах, расположенных вне области  $D$ , значения функции  $f(t)$  полагаются равными ее значениям в ближайших узлах, расположенных в области  $D$ . Если таких узлов несколько, то выбирается или значение в одном из них, или среднее значение.

Сплайн, составленный из полиномов  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_i^k), k=0, 1, \dots, N$ , обозначим через  $f_N(t)$ . Очевидно, этот сплайн не является непрерывным. Его погрешность на классе функций  $\bar{B}_{\alpha, 0, 1}(D, M)$  равна  $\frac{B}{2^{N\alpha}}$ .

### Список литературы

1. **Жданов, М. С.** Аналогии интеграла типа Коши в теории геофизических полей / М. С. Жданов. – М. : Наука, 1984. – 328 с.
2. **Гюнтер, Н. М.** Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н. М. Гюнтер. – М. : ГИТТЛ, 1953. – 416 с.
3. **Бойков, И. В.** Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2007. – 234 с.
4. **Бабенко, К. И.** Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / К. И. Бабенко. – М. : Наука, 1979. – 196 с.

**Бойков Илья Владимирович**

доктор физико-математических наук,  
профессор,  
заведующий кафедрой высшей  
и прикладной математики,  
Пензенский государственный  
университет

**Boikov Ilya Vladimirovich**

Doctor of Science (in Mathematics),  
professor, head of sub-department  
of highest and applied mathematics,  
Penza State University

**Кравченко Марина Витальевна**

студент,  
Пензенский государственный  
университет

**Kravchenko Marina Vitalyevna**

graduate student,  
Penza State University

---

УДК 550.831

**Бойков, И. В.**

**Оптимальные методы восстановления лапласовых полей /**  
И. В. Бойков, М. В. Кравченко // Известия высших учебных заведений.  
Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). –  
С. 25–43.

## ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

*Аннотация.* Вычислены поперечники Бабенко и Колмогорова функциональных множеств  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  и  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ , где  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ,  $r$  и  $u$  – натуральные числа,  $\gamma$  – действительное неотрицательное число. Построены локальные сплайны, которые являются оптимальным методом аппроксимации функциональных множеств  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  и  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ .

*Ключевые слова:* аппроксимация, локальные сплайны, поперечники Бабенко и Колмогорова.

*Abstract.* Evaluated Babenko and Kolmogorov widths of functional sets  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  and  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ , where  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ,  $r$  and  $u$  are natural numbers,  $\gamma$  is a real nonnegative number. Constructed local splines which are the optimal in order methods for approximation of functional classes  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  and  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ .

*Keywords:* approximation, local splines, Babenko and Kolmogorov widths.

### Введение

Класс функций  $Q_r(\Omega, M)$  был введен К. И. Бабенко, и им же была сформулирована задача вычисления поперечников Бабенко и Колмогорова на этом классе функций [1]. Эта задача была решена автором [2]. Им же были введены классы функций  $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ ,  $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$ ,  $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$  и вычислены поперечники Бабенко и Колмогорова на этих классах функций [3, 4]. В работах [2–4] были также построены локальные сплайны вычисления функций из классов  $Q_r$ ,  $Q_{r,\gamma}$ ,  $B_{r,\gamma}$ . Показано, что эти сплайны являются наилучшим по порядку по точности методом приближения функций из классов  $Q_r$ ,  $Q_{r,\gamma}$ ,  $B_{r,\gamma}$ .

Интерес к наилучшей аппроксимации классов функций  $Q_r$ ,  $Q_{r,\gamma}$ ,  $B_{r,\gamma}$  объясняется тем, что решения многих видов уравнений (эллиптических уравнений, слабосингулярных интегральных уравнений, сингулярных интегральных уравнений) принадлежат этим классам функций.

В данной работе результаты [3, 4] распространяются на более широкие классы функций – классы функций  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ ,  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ ,  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . Для этих классов функций вычислены поперечники Бабенко и Колмогорова и построены локальные сплайны.

Напомним определения поперечников Бабенко и Колмогорова.

Пусть  $B$  – банахово пространство,  $X \subset B$  – компакт,  $\Pi: X \rightarrow \bar{X}$  – представление компакта  $X \subset B$  конечномерным пространством  $\bar{X}$ .

**Определение 1** [1]. Пусть  $L^n$  – множество  $n$ -мерных линейных подпространств пространства  $B$ . Выражение

$$d_n(X, B) = \inf_{L^n} \sup_{x \in X} \inf_{u \in L^n} \|x - u\|,$$

где последний  $\inf$  берется по всем подпространствам  $L^n$  размерности  $n$ , определяет  $n$ -поперечник Колмогорова.

**Определение 2** [1]. Пусть  $\chi$  – множество всех  $n$ -мерных линейных подпространств пространства  $B$ ,  $\text{Map}(X, \chi)$  – совокупность всех непрерывных отображений вида  $\Pi: X \rightarrow \bar{X}$ , где  $\bar{X} \in \chi$ . Выражение

$$d_n'(X, B) = \inf_{(L^n, \Pi)} \sup_{x \in X} \|x - \Pi(x)\|,$$

где  $\inf$  берется по всевозможным парам  $(L^n, \Pi)$ , состоящим из  $n$ -мерного линейного пространства  $L^n \subset B$  и непрерывного отображения  $\Pi: X \rightarrow L^n$ , определяет линейный  $n$ -поперечник Колмогорова.

**Определение 3** [1]. Пусть  $\chi \in R^n$ . Выражение

$$\delta_n(X) = \inf_{(\Pi: X \rightarrow R^n)} \sup_{x \in X} \text{diam } \Pi^{-1}\Pi(x),$$

где  $\inf$  берется по всем непрерывным отображениям  $\Pi: X \rightarrow R^n$ , определяет  $n$ -поперечник Бабенко.

Приведем определения классов  $Q_r$ ,  $Q_{r,\gamma}$ ,  $Q_{r,\gamma}^u$ ,  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u$ .

В работе К. И. Бабенко [1] введен класс функций  $Q_r(\Omega, M)$ .

**Определение 4.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . Функция  $\varphi(x_1, \dots, x_l)$  принадлежит классу  $Q_r(\Omega, M)$ , если выполнены условия

$$\max_{x \in \Omega} \left| \partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l} \right| \leq M$$

при  $0 \leq |\nu| \leq r$ ;

$$\left| \partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l} \right| \leq M / (d(x, \Gamma))^{|\nu| - r}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при  $r < |\nu| \leq 2r + 1$ , где  $x = (x_1, \dots, x_l)$ ,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_l)$ ,  $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_l$ ,  $d(x, \Gamma)$  – расстояние от точки  $x$  до границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ , вычисляемое по формуле  $d(x, \Gamma) = \min_{1 \leq i \leq l} \min(|-1 - x_i|, |1 - x_i|)$ .

Приводимые ниже классы функций являются обобщениями  $Q_r(\Omega, M)$ .

**Определение 5** [3]. Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . Функция  $\varphi(x_1, \dots, x_l)$  принадлежит классу  $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ , если выполнены условия

$$\max_{x \in \Omega} \left| \partial^{|\nu|} \varphi(x) / \partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l} \right| \leq M$$

при  $0 \leq |\nu| \leq r$ ;

$$\left| \partial^{|\nu|} \varphi(x) / \partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l} \right| \leq M / (d(x, \Gamma))^{| \nu | - r - \zeta}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при  $r < |\nu| \leq s$ , где  $s = r + [\gamma] + 1$ ,  $\gamma = [\gamma] + \mu$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $\zeta = 1 - \mu$  при  $\gamma$  нецелом,  $s = r + \gamma$  при  $\gamma$  целом.

**Определение 6.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ,  $\gamma$  и  $u$  – неотрицательные целые числа. Множество  $\bar{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, M)$  состоит из функций  $f(t_1, t_2, \dots, t_l)$ , удовлетворяющих условиям

$$\max_{t \in \Omega} \left| \partial^{|\nu|} \varphi(t) / \partial t_1^{\nu_1} \dots \partial t_l^{\nu_l} \right| \leq M, \quad 0 \leq |\nu| \leq r - 1;$$

$$\left| \partial^{|\nu|} \varphi(t) / \partial t_1^{\nu_1} \dots \partial t_l^{\nu_l} \right| \leq M (1 + |\ln^u d(t, \Gamma)|), \quad t \in \Omega \setminus \Gamma, \quad |\nu| = r;$$

$$\left| \partial^{|\nu|} \varphi(t) / \partial t_1^{\nu_1} \dots \partial t_l^{\nu_l} \right| \leq M (1 + |\ln^{u-1} d(t, \Gamma)|) / (d(t, \Gamma))^{| \nu | - r}, \quad t \in \Omega \setminus \Gamma, \quad r < |\nu| \leq s,$$

где  $s = r + \gamma$ .

Наряду с классом функций  $\bar{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, M)$  введем класс функций  $Q_{r, \gamma}^u(\Omega, M)$ .

**Определение 7.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ,  $u$  – натуральное число,  $\gamma$  – нецелое число. Класс  $Q_{r, \gamma}^u(\Omega, M)$  состоит из функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\max_{t \in \Omega} \left| \partial^{|\nu|} \varphi(t) / \partial t_1^{\nu_1} \dots \partial t_l^{\nu_l} \right| \leq M, \quad 0 \leq |\nu| \leq r,$$

$$\left| \partial^{|\nu|} \varphi(t) / \partial t_1^{\nu_1} \dots \partial t_l^{\nu_l} \right| \leq \frac{M}{(d(t, \Gamma))^{| \nu | - r - \zeta}} (1 + |\ln^u d(t, \Gamma)|), \quad r < |\nu| \leq s,$$

где  $s = r + [\gamma] + \mu$ ,  $\gamma = [\gamma] + \mu$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $\zeta = 1 - \mu$ .

Через  $T_r(f, [a, b], c) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (t-c)^k$  обозначим отрезок ряда Тейлора функции  $f(t)$ , определенный в области  $[a, b]$  по степеням  $(t-c)$ ,  $c \in [a, b]$ .

### 1 Поперечники функциональных множеств $Q_{r, \gamma}^u$ , $\bar{Q}_{r, \gamma}^u$ , $\Omega = [-1, 1]^l$

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $r, u, \gamma$  – положительные целые числа,  $s = r + \gamma$ . Справедлива оценка

$$\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)) \underset{\cap}{\cup} d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M), C) \underset{\cap}{\cup} n^{-s}.$$

**Доказательство.** Вначале оценим снизу величину  $\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M))$ . С этой целью заметим, что класс функций  $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$  вложен в класс функций  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ . Для класса функций  $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$  известна [3, 4] оценка снизу поперечника Бабенко:

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq An^{-s}.$$

Следовательно,

$$\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)) \geq \delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq An^{-s}. \quad (1)$$

Оценка снизу получена.

Построим локальные сплайны, аппроксимирующие функции из класса  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  с точностью  $O(n^{-s})$ .

В отдельности опишем построение в случае  $u=1$  и  $u \geq 2$ .

Пусть  $u=1$ . Разделим сегмент  $[-1, 1]$  на  $2N$  частей точками  $t_k = -1 + (k/N)^v$ ,  $\tau_k = 1 - (k/N)^v$ ,  $k=0, 1, \dots, N$ ,  $v = s/(s-\gamma)$ . Введем обозначения:  $\Delta_k^1 = [t_k, t_{k+1}]$ ,  $\Delta_k^2 = [\tau_{k+1}, \tau_k]$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$ .

Сегменты  $\Delta_0^1$ ,  $\Delta_0^2$  разделим на более мелкие сегменты  $\Delta_{0,j}^1 = [t_{0,j}, t_{0,j+1}]$ ,  $\Delta_{0,j}^2 = [\tau_{0,j+1}, \tau_{0,j}]$ ,  $j=0, 1, \dots, M_0-1$ , где  $t_{0,j} = t_0 + (t_1 - t_0)j/M_0$ ,  $\tau_{0,j} = \tau_0 - (\tau_0 - \tau_1)j/M_0$ ,  $j=0, 1, \dots, M_0$ ,  $M_0 = [\ln N]$ .

Построим интерполяционные полиномы таким образом, чтобы в число узлов интерполяции входили концы сегментов  $\Delta_{0,j}^i$ ,  $i=1, 2$ ,  $j=0, 1, \dots, M_0-1$ ,  $\Delta_k^i$ ,  $i=1, 2$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$ .

Полином  $P_s(f, [a, b])$ , интерполирующий функцию  $f(t) \in \bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  на сегменте  $[a, b]$ , строится следующим образом.

Обозначим через  $\zeta_k$ ,  $k=1, 2, \dots, s$  узлы полинома Чебышева первого рода степени  $s$ . Отобразим сегмент  $[\zeta_1, \zeta_s] \subset [-1, 1]$  на сегмент  $[a, b]$  таким образом, чтобы точки  $\zeta_1$  и  $\zeta_s$  перешли в точки  $a$  и  $b$  соответственно. Образы точек  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$  на сегменте  $[a, b]$  обозначим через  $\zeta'_1, \dots, \zeta'_s$ .

Интерполяционный полином, построенный по узлам  $\zeta'_1, \dots, \zeta'_s$ , обозначим через  $P_s(f, [a, b])$ .

На сегментах  $\Delta_{0,j}^i$ ,  $i=1, 2$ ,  $j=0, 1, \dots, M_0-1$ ,  $\Delta_k^i$ ,  $i=1, 2$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$ , функция  $f(t) \in \bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  аппроксимируется интерполяционными полиномами  $P_s(f, \Delta_{0,j}^i)$ ,  $P_s(f, \Delta_k^i)$ ,  $i=1, 2$ ,  $j=0, 1, \dots, M_0-1$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$ . Сплайн, составленный из этих полиномов, обозначим через  $f_N(t)$ .

Можно показать, что

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C([-1,1])} \leq An^{-s}.$$

Отсюда следует, что

$$d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^1(\Omega, M), C) \leq An^{-s}. \quad (2)$$

Используя неравенство [5]  $\delta_n(X, C) \leq 2d_n(X, C)$  и оценки (1) и (2), завершаем доказательство теоремы при  $u = 1$ .

Разделим сегмент  $[-1, 1]$  на  $2N$  частей точками  $t_k = -1 + \left(\frac{k}{N}\right)^v$ ,

$\tau_k = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^v$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ,  $v = s/(s - \gamma)$ . Обозначим через  $\Delta_k^1$  и  $\Delta_k^2$  сегменты  $\Delta_k^1 = [t_k, t_{k+1}]$  и  $\Delta_k^2 = [\tau_{k+1}, \tau_k]$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . Введем числа  $M_0 = [\ln^{u/r} N]$  и  $M_k = [\ln^{(u-1)/s}(N/k)]$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . В случае, если  $\ln^{(u-1)/s}(N/k) \leq 1$ , полагаем  $M_k = 1$ . Каждый из сегментов  $\Delta_k^1$  и  $\Delta_k^2$  разделим на  $M_k$  равных частей,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . Сегменты, полученные в результате деления, обозначим через  $\Delta_{k,j}^i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ,  $j = 0, 1, \dots, k - 1$ .

В каждом сегменте  $\Delta_{k,j}^i$  функцию  $f(t)$  будем приближать интерполяционным полиномом  $P_s(f, \Delta_{k,j}^i)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ,  $j = 0, 1, \dots, M_k - 1$ . Сплайн, составленный из полиномов  $P_s(f, \Delta_{k,j}^i)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ,  $j = 0, 1, \dots, M_k - 1$ , обозначим через  $f_N(t)$ .

Оценим точность аппроксимации функции  $f(t)$  сплайном  $f_N(t)$ .

Пусть  $t \in \Delta_0^i$ ,  $i = 1, 2$ . Очевидно,

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta_{0,0}^1)} \leq AE_{s-1}(f, \Delta_{0,0}^1) \lambda_s,$$

где  $\Delta_{0,0}^1 = [t_{0,0}, t_{0,1}]$ ,  $E_s(f, [a, b])$  – наилучшее приближение функции  $f(t)$  на сегменте  $[a, b]$  полиномом  $s$ -го порядка,  $\lambda_s$  – константа Лебега.

Используя отрезок ряда Тейлора  $T_{r-1}(f, \Delta_{0,0}^1, -1)$ , покажем, что

$$\begin{aligned} E_{s-1}(f, \Delta_{0,0}^1) &\leq \left\| f(t) - T_{r-1}(f, \Delta_{0,0}^1, -1) \right\|_{C(\Delta_{0,0}^1)} \leq \\ &\leq \frac{1}{(r-1)!} \max_{t \in \Delta_{0,0}^1} \left| \int_{-1}^t f^{(r)}(\tau) (t - \tau)^{r-1} d\tau \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{(r-1)!} \max_{t \in \Delta_{0,0}^1} \left| \int_{-1}^t (1 + |\ln^u(1 + \tau)|) (t - \tau)^{r-1} d\tau \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq B(h_{00}^r |\ln^u h_{00}|) \leq B \left( \frac{1}{N^v M_0} \right)^r \ln^u \left( \frac{1}{N^v M_0} \right) \leq \\ &\leq B \frac{1}{N^s \ln^u N} (\ln^u N + \ln^u \ln N) = B \frac{1}{N^s}, \end{aligned}$$

где  $h_{00} = h_0/M_0$ ,  $h_0 = t_1 - t_0$ .

Здесь и всюду ниже через  $B$  обозначаются константы, независимые от  $N$  и от функции  $f(t)$ .

Аналогичным образом оцениваются значения  $E_{r-1}(f, \Delta_{0,j}^1)$ ,  $j=1, 2, \dots, M_0-1$  и  $E_{r-1}(f, \Delta_{0,j}^2)$ ,  $j=1, 2, \dots, M_0-1$ .

Так как константа Лебега  $\lambda_s \leq B \ln s$ , то окончательно имеем  $\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta_0^i)} \leq BN^{-s}$ ,  $i=1, 2$ .

Оценим  $\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta_{k,j}^i)}$ ,  $i=1, 2$ ,  $k=1, 2, \dots, N-1$ ,  $j=0, 1, \dots, k-1$ .

Очевидно,

$$\begin{aligned} &\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta_{k,1}^1)} \leq \\ &\leq \frac{B(t_{k,1} - t_{k,0})^s}{2^{s-1} s!} \left( \frac{N}{k} \right)^{\nu\gamma} \left( 1 + \left| \ln^{u-1} \left( \frac{N}{k} \right)^{\nu\gamma} \right| \right) \leq B \left( \frac{h_k}{M_k} \right)^s \left( \frac{N}{k} \right)^{\nu\gamma} \left( 1 + \ln^{u-1} \frac{N}{k} \right) \leq \\ &\leq B \left( \left( \left( \frac{k+1}{N} \right) - \left( \frac{k}{N} \right)^v \right) \frac{1}{\left( \ln \frac{N}{k} \right)^{(u-1)/s}} \right)^s \left( \frac{N}{k} \right)^{\nu\gamma} \left( 1 + \ln^{u-1} \frac{N}{k} \right) \leq \\ &\leq B \frac{(k+\theta)^{(v-1)s-\nu\gamma}}{N^s} \leq \frac{B}{N^s}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом оцениваются нормы

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta_{k,j}^1)}, \quad k=1, 2, \dots, N-1, \quad j=1, 2, \dots, k-1,$$

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta_{k,j}^2)}, \quad k=1, 2, \dots, N-1, \quad j=0, 1, \dots, k-1.$$

Собирая полученные выше оценки, имеем

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C([-1,1])} \leq BN^{-s}.$$

Оценим число узлов, используемых при построении локального сплайна.

Для этого оценим число сегментов  $\Delta_{k,j}^i$ ,  $i=1, 2$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$ ,  $j=0, 1, \dots, k-1$ .

Очевидно, в случае, когда  $u-1 \leq s$ ,

$$\begin{aligned} m &= 2 \sum_{k=0}^{N-1} M_k \leq 2 \left( \ln^r N + \sum_{k=1}^{N-1} \ln^s \frac{N}{k} \right) \leq 2 \left( \ln^r N + \sum_{k=1}^{N-1} \ln \frac{N}{k} \right) = \\ &= 2 \left( \ln^r N + (N-1) \ln N - \sum_{k=2}^{N-1} \ln k \right) \leq 2 \left( \ln^r N + (N-1) \ln N - \int_2^{N-1} \ln x dx \right) \leq \\ &\leq 2 \left( \ln^r N + (N-1) \ln N - (N-1) \ln(N-1) + N \right) = \\ &= 2 \left( \ln^r N + \ln \left( \frac{N}{N-1} \right)^{N-1} + N \right) = BN. \end{aligned}$$

Рассмотрим общий случай. Пусть  $q = [(u-1)/s] + 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} m &= 2 \sum_{k=0}^{N-1} M_k \leq 2 \left( \ln^r N + \sum_{k=1}^{N-1} \ln^s \frac{N}{k} \right) \leq B \left( N + \sum_{k=1}^{N-1} \ln^q \frac{N}{k} \right) = \\ &= B \left( N + \sum_{k=2}^{N-1} \left| \ln^q \frac{N}{k} \right| \right) \leq B \left( N + \int_1^N \left| \ln^q \frac{x}{N} \right| dx \right) = B \left( N + N \int_{1/N}^1 |\ln^q t| dt \right) \leq BN. \end{aligned}$$

Следовательно, общее число узлов, используемых при построении локального сплайна  $f_N(t)$ , равно  $n = sm = BN$ .

Отсюда следует, что

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C([-1,1])} \leq BN^{-s}.$$

Следовательно,

$$d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M), C) \leq An^{-s}. \quad (3)$$

Используя неравенство  $\delta_n(X) \leq 2d_n(X, C)$  и оценки (1), (3), завершаем доказательство теоремы в общем случае.

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]$ ,  $r, u$  – положительные целые числа,  $\gamma$  – положительное рациональное число,  $s = r + [\gamma] + 1$ . Справедлива оценка

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)) \underset{\cup}{\cap} d_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M), C) \underset{\cup}{\cap} n^{-s}.$$

## 2 Поперечники множества функций $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ , $\Omega = [-1, 1]^l$ , $l = 2, 3, \dots$

**Теорема 3.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 2, 3, \dots$ ,  $u = 1, 2, \dots$ ,  $v = s/(s - \gamma)$ . Справедливы оценки

$$\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)) \cup d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M), C) \cup \begin{cases} n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{s/l}, & v = l/(l-1), r \geq ul, s \geq (u-1)l. \end{cases}$$

**Доказательство.** Вначале найдем оценку снизу поперечника Бабенко  $\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M))$ . Для этого заметим, что множество функций  $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$  вложено в  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ . Известно [3, 4], что

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq \begin{cases} n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{s/l}, & v = l/(l-1). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)) \geq \delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq A \begin{cases} n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{s/l}, & v = l/(l-1). \end{cases}$$

Оценка снизу получена.

Приступим к построению непрерывных локальных сплайнов, аппроксимирующих функции  $f(t) \in \bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ ,  $t = (t_1, \dots, t_l)$ .

Вначале рассмотрим случай, когда  $v < l/(l-1)$ .

Обозначим через  $\Delta_k$  множество точек  $t = (t_1, \dots, t_l)$  таких, что расстояние от  $t$  до границы  $\Gamma$  области  $\Omega$  удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{k}{N}\right)^v \leq d(t, \Gamma) \leq \left(\frac{k+1}{N}\right)^v, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, v = s/(s - \gamma).$$

Здесь  $d(t, \Gamma) = \min_{1 \leq i \leq l} \min(|t_i - 1|, |t_i + 1|)$ .

Каждую область  $\Delta_k$  покроем кубами и параллелепипедами  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$  с гранями, параллельными координатным плоскостям, и с ребрами, длины которых равны  $h_k = \left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . При этом в число вершин кубов (или параллелепипедов)  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{k-1}$  входят вершины кубов (или параллелепипедов)  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

То обстоятельство, что среди кубов  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$  при каждом значении  $k$  могут находиться параллелепипеды, у которых длина одного или нескольких ребер меньше  $h_k$ , не влияет на общность рассуждений. Введем числа

$$M_0 = 1 + \left[ (\ln N)^{u/r} \right], \quad M_k = 1 + \left[ \left( \ln \frac{N}{k} \right)^{(u-1)/s} \right].$$

Каждый из квадратов  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$  покроем  $M_k^l$  квадратами, которые обозначим через  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Обозначим через  $P_{s, \dots, s}(f, [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l])$  интерполяционный полином, который определяется формулой

$$P_{s, \dots, s}(f, [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]) = P_s^t [P_s^{t-1} [P_s^{t-2} [\dots [P_s^1 [f, [a_l, b_l]], [a_{l-1}, b_{l-1}]], \dots, [a_1, b_1]],$$

где полином  $P_s(f, [a, b])$  определен в предыдущем параграфе, а верхний индекс в выражении  $P_s^t(f, [a_i, b_i])$  определяет переменную, по которой проводится интерполяция.

Построение сплайна начнем с куба  $\Delta^{N-1}$ . В этом кубе функцию  $f(t)$  приближаем интерполяционным полиномом  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta^{N-1})$ . Построив этот полином, переходим к приближению функции  $f(t)$  в кубах и параллелепипедах  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2}$ . В каждом из кубов (и параллелепипедов)  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2}$  функция  $f(t)$  аппроксимируется интерполяционным полиномом  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2})$ , который строится следующим образом. В узлах интерполяционного полинома  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2})$ , не расположенных на гранях куба  $\Delta^{N-1}$ , берутся значения функции  $f(t)$ , а в узлах, расположенных на соответствующих гранях куба  $\Delta^{N-1}$ , берутся значения полинома  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta^{N-1})$ . Сначала строятся интерполяционные полиномы  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2})$  в области  $\Delta^{N-2}$ , аналогичным образом строятся интерполяционные полиномы в области  $\Delta^{N-3}$  и последовательно во всех областях до  $\Delta^0$  включительно.

Сплайн, составленный из полиномов

$$P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

обозначим через  $f_N(t_1, \dots, t_l)$ .

После проведения громоздких вычислений можно показать, что

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Omega)} \leq AN^{-s}$$

и что число узлов  $n$ , используемых при построении сплайна  $f_N(t)$ , равно  $n \underset{\cap}{\cup} N^l$ .

Из непрерывности локального сплайна  $f_N(t)$  и двух последних оценок следует, что

$$d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M), C) \leq An^{-s/l}.$$

Из этого неравенства, неравенства  $\delta_n(X, C) \leq 2d_n(X, C)$  и оценки снизу поперечника Бабенко следует справедливость теоремы при  $v < l(l-1)$ .

Аналогичным образом исследуется случай, когда  $v = l(l-1)$ .

Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда  $u = 1, v = s/(s-\gamma), v > l(l-1)$ .

В этом случае справедливо утверждение, которое приведем без доказательства.

**Теорема 4.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l, l = 2, 3, \dots, u = 1, v = s/(s-\gamma), v > l(l-1)$ . Справедлива оценка

$$\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^1(\Omega, M)) \underset{\cap}{\cup} d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^1(\Omega, M), C) \underset{\cap}{\cup} \frac{\ln n}{n^{(s-\gamma)/(l-1)}}.$$

#### Список литературы

1. **Бабенко, К. И.** О некоторых задачах теории приближений и численного анализа / К. И. Бабенко // Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40. – Вып. 1. – С. 3–28.
2. **Бойков, И. В.** Оптимальные по точности алгоритмы вычисления интегралов / И. В. Бойков // Оптимальные методы вычислений и их применение : межвузовский сборник научных трудов. – Вып. 8. – Пенза : Изд-во Пенз. политехн. ин-та, 1987. – С. 4–22.
3. **Бойков, И. В.** Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами / И. В. Бойков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38. – № 1. – С. 25–33.
4. **Бойков, И. В.** Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2007. – 236 с.
5. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / под ред. К. И. Бабенко. – М. : Наука, 1979. – 196 с.

#### **Бойков Илья Владимирович**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
высшей и прикладной математики,  
Пензенский государственный  
университет

#### **Boykov Ilya Vladimirovich**

Doctor of Science (in Mathematics),  
professor, head of sub-department  
of highest and applied mathematics,  
Penza State University

УДК 518.5

**Бойков, И. В.**

**Поперечники некоторых множеств дифференцируемых функций /**  
И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион.  
Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 44–54.

УДК 514.7

А. И. Долгарев, Е. В. Зелева

## КРИВЫЕ 3-МЕРНОГО ГАЛИЛЕЕВА ПРОСТРАНСТВА С РАСТРАНОМ С 2-МЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ

*Аннотация.* По кривизне и кручению кривой галилеева пространства с растром с 2-мерным временем получены ее параметрические уравнения. Приведены примеры.

*Ключевые слова:* кривые 3-мерного галилеева пространства с растром с 2-мерным временем.

*Abstract.* On curvature and twisted the curve Galilean space off rastran with 2-dimension time come of its parameter equation. To bring example.

*Keywords:* Curved 3-dimensional Galilean space rastranom with the 2-dimensional time.

Одулярные пространства введены Л. В. Сабининым в 1977 г. [1]. Пространства с одулями Ли в аксиоматике Г. Вейля называются ВО-пространствами, изучаются в [2]. Имеется несколько видов 3-мерных растратов [2, 3], один из них определен в [3], это W-растрат, на котором введена галилеева норма с 2-мерным временем. Операции, задающие растрат на действительном многообразии  $\mathbf{R}^3$ , могут быть различны. В зависимости от выбранных операций на  $\mathbf{R}^3$  может получиться одна и та же алгебраическая структура, но определенные по разному операции выделяют ее различные свойства, позволяя получить различные геометрии с этой структурой. На основании свойств W-растрата из [3] ниже устанавливается, что W-растрат является и V-растром, т.е. является прямой суммой 2-мерного растрата и 1-мерного евклидова векторного пространства. Операции, определяющие W-растрат, сообщают ему новые качественные свойства, приводящие к своеобразной галилеевой геометрии с 2-мерным временем. Изучение пространства с W-растром начато в [3]. Ниже рассматриваются регулярные кривые галилеева пространства с W-растром, определена их кривизна. Кручение кривых оказалось равным нулю. Скалярная функция кривизны является натуральным уравнением кривой – получено параметрическое задание кривой по функции ее кривизны. Приведены примеры нахождения векторного описания кривых по скалярной функции кривизны.

### 1 Пространство с W-растром размерности 3, время в котором 2-мерно

#### 1.1 W-растрат размерности 3 с галилеевой нормой

На многообразии  $\mathbf{R}^3$  троек действительных чисел W-растрат задается следующими операциями:

$$(x^1, x^2, x) + (y^1, y^2, y) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, xe^{y^1+y^2} + y); \quad (1)$$

$$t(x^1, x^2, x) = \left( tx^1, tx^2, x \frac{e^{(x^1+x^2)t} - 1}{e^{x^1+x^2} - 1} \right), \quad x^1 + x^2 \neq 0;$$

$$t(x^1, x^2, x) = (tx^1, tx^2, tx), \quad x^1 + x^2 = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (2)$$

см. [3]. Обозначение 3-мерного W-растрана:  $\mathbf{P}_W^3$  – это действительный одуль Ли, его элементы называются растами и обозначаются строчными греческими буквами. Нулевым растом является  $\vartheta = (0, 0, 0)$ ; раст  $-\rho = (-x^1, -x^2, -xe^{-x^1-x^2})$  противоположен расту  $\rho = (x^1, x^2, x)$ . Третья компонента результатов операций зависит от первой и второй компонент, поэтому они являются ведущими компонентами. Первые свойства W-растрана изучаются в [3].

Обозначим:

$$(1, 0, 0) = \gamma, \quad (0, 1, 0) = \beta, \quad (0, 0, 1) = \gamma.$$

Всякий раст  $\rho = (x^1, x^2, x)$  однозначно представляется в виде разложения

$$\rho = (x^1, x^2, x) = x^1\alpha + x^2\beta + x\gamma,$$

поэтому  $(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{B}$  является базисом W-растрана, числа  $x^1, x^2, x$  называются координатами раста  $\rho = (x^1, x^2, x)$  в базисе  $\mathbf{B}$ . Раствы  $\alpha, \beta$  перестановочны, порожденный ими подрастран  $\langle \alpha, \beta \rangle = \mathbf{L}^2$  является 2-мерным действительным линейным пространством. Раствы  $\alpha, \gamma$  и  $\beta, \gamma$  не перестановочны, они порождают 2-мерные растраны. Раст  $\gamma$  порождает 1-мерный подрастран  $\langle \gamma \rangle = \mathbf{L}^1$ , W-растран есть полупрямая сумма линейных пространств:

$$\mathbf{P}_W^3 = \mathbf{L}^2 \dot{+} \mathbf{L}^1.$$

Галилеевым скалярным произведением  $\rho\sigma$  растов  $\rho = (x^1, x^2, x)$  и  $\sigma = (y^1, y^2, y)$  называется число, определяемое следующими условиями:

$$\rho\sigma = \begin{cases} (x^1 + x^2)(y^1 + y^2), & \text{если } x^1 + x^2 \neq 0 \text{ или } y^1 + y^2 \neq 0; \\ xy, & \text{если } x^1 + x^2 = y^1 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Согласно [3], галилеева норма  $\|\rho\|$  раста  $\rho = (x^1, x^2, x)$  равна

$$\|\rho\| = \begin{cases} |x^1 + x^2|, & \text{если } x^1 + x^2 \neq 0; \\ |x|, & \text{если } x^1 + x^2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Первые две компоненты  $x^1, x^2$  раста  $\rho = (x^1, x^2, x)$  называются временными, а третья – пространственной. Мы имеем растран с 2-мерным временем, его обозначение  $\mathbf{P}_W^{3,2}$ . Обе временные координаты растов являются ведущими. Это означает, что время имеет воздействие на пространственную компоненту события  $(x^1, x^2, x)$ . Проявляется воздействие в формулах операций над растами и далее в дифференцировании растов. Раст  $\rho$  называется евклидовым, если  $x^1 + x^2 = 0$ , среди них раст  $\rho = (0, 0, x)$ ; евклидовы раствы также на-

зываются векторами; для них используются и обозначения  $\vec{a}, \dots, \vec{r}, \dots$ . Линейное пространство  $\langle \gamma \rangle = \mathbf{L}^1$  превращается в евклидово векторное пространство  $\mathbf{V}^1$ . Линейное пространство  $\langle \alpha, \beta \rangle = \mathbf{L}^2$  становится 2-мерным временным векторным пространством со скалярным произведением, однако это скалярное произведение векторов своеобразно: скалярное произведение  $\lambda \mu$  векторов  $\lambda = (x^1, x^2, 0)$  и  $\mu = (y^1, y^2, 0)$  равно  $\lambda \mu = (x^1 + x^2)(y^1 + y^2)$ ; скалярный квадрат:  $\lambda^2 = (x^1 + x^2)^2$ , теперь норма  $|\lambda|$  вектора  $\lambda$  такова:  $|\lambda| = |x^1 + x^2|$ . Раст  $\rho$  называется галилеевым, если хотя бы одна ведущая компонента ненулевая. Два раста являются перпендикулярными, если один из них евклидов, а другой – галилеев. Обозначаем временное пространство через  $\mathbf{T}^2$ . Существует полупрямое разложение:

$$\mathbf{P}_{\mathbb{W}}^{3,2} = \mathbf{T}^2 \wr \mathbf{V}^1.$$

Раст  $\rho = (x^1, x^2, x)$  имеет временную составляющую  $\lambda = (x^1, x^2, 0)$  и пространственную, векторную, составляющую  $\vec{r} = (0, 0, x)$ :

$$\rho = (x^1, x^2, x) = (x^1, x^2, 0) + (0, 0, x) = \lambda + \vec{r}.$$

В  $\mathbf{T}^2$  существует изотропное направление, определяемое галилеевым растом  $\tau = (t, -t, 0)$ ,  $\tau \neq \emptyset, |\tau| = 0$ . Однако направление  $\tau$  не изотропно в  $\mathbb{W}$ -растрани  $\mathbf{P}_{\mathbb{W}}^{3,2}$ .

Растраниая функция  $\rho(t)$  есть упорядоченная тройка  $\rho(t) = (x^1(t), x^2(t), x(t))$  действительных функций  $x^1(t), x^2(t), x(t)$  действительного параметра  $t$  с общей областью определения  $t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$ . Считаем, что  $x^1(t), x^2(t), x(t)$  есть функции класса  $C^3$ , растраниая функция  $\rho(t)$  принимает значения на растрани  $\mathbf{P}_{\mathbb{W}}^{3,2}$ , ее класс тоже  $C^3$ . Производная растраниой функции на  $\mathbb{W}$ -растрани, по [3], равна

$$\rho'(t) = \left( x^1(t), x^2(t), \left( e^{x^1(t)+x^2(t)} - 1 \right) \left( \frac{x'(t)}{x^1(t)+x^2(t)} - x(t) \right) \right) \text{ для } x^1 + x^2 \neq 0. \quad (4)$$

В изотропном временном направлении  $\tau$  производная растраниой функции находится как производная векторной функции:

$$\rho'(t) = (x^1(t), x^2(t), x'(t)), \quad x^1 + x^2 = 0. \quad (5)$$

В частности, если функции  $x^1(t), x^2(t)$  принимают постоянные значения, то

$$\rho'(t) = \left( C, x^2(t), x(t) \right) = \left( 0, x^2(t), \left( e^{x^2(t)} - 1 \right) \left( \frac{x'(t)}{x^2(t)} - x(t) \right) \right);$$

$$\rho'(t) = (x^1(t), C, x(t)) = \left( x^1(t), 0, \left( e^{x^1(t)} - 1 \right) \left( \frac{x'(t)}{x^1(t)} - x(t) \right) \right);$$

$$(C, C, x(t))' = (0, 0, x'(t)).$$

В первом и втором случаях формулы дифференцирования растранных функций такие же, как для 2-мерных растранных функций, т.е. как для функций со значениями в однородном растрани [2, с. 126]. Правила дифференцирования векторных функций на растранные функции не распространяются; в том числе производная суммы растранных функций не равна сумме производных этих функций.

### 1.2 W-растрани и V-растрани

В работе [3] перечислены действительные растрани размерности 3, приведен и V-растрани  $\mathbf{P}_V^3$ , который может быть на многообразии  $\mathbf{R}^3$  задан операциями

$$(x, x^1, x^2) + (y, y^1, y^2) = (x + y, x^1 e^y + y^1, x^2 + y^2);$$

$$t(x, x^1, x^2) = \left( xt, x^1 \frac{e^{xt} - 1}{e^x - 1}, x^2 t \right), \quad x \neq 0; \quad t(0, x^1, x^2) = (0, x^1 t, x^2 t), \quad t \in \mathbf{R};$$

причем  $-\rho = (-x, -x^1 e^{-x}, -x^2)$ . Если  $(1, 0, 0) = \alpha$ ,  $(0, 1, 0) = \beta$ ,  $(0, 0, 1) = \gamma$ , то всякий раст  $\rho = (x^1, x^2, x)$  из  $\mathbf{P}_V^3$  однозначно представляется в виде разложения

$$\rho = (x^1, x^2, x) = x^1 \alpha + x^2 \beta + x \gamma,$$

и  $(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{B}$  является базисом V-растрани.

В W-растрани  $\mathbf{P}_W^3$  рассмотрим раст  $\delta = \beta - \alpha$ . Его координаты:  $\delta = (-1, 1, 0)$ . Вычисляем коммутаторы:

$$[\delta, \gamma] = -\delta - \gamma + \delta + \gamma = (1, -1, 0) + (0, 0, -1) + (-1, 1, 0) + (0, 0, 1) = \vartheta,$$

$$[\delta, \alpha] = \vartheta, \quad [\gamma, \alpha] = (e - 1)\gamma.$$

Подгруппа  $\langle \alpha, \delta, \gamma \rangle$  группы  $(\mathbf{P}_W^3, +)$  имеет генетический код:

$$\langle \alpha, \delta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \delta, \gamma \mid [\delta, \alpha] = [\gamma, \delta] = \vartheta, [\gamma, \alpha] = (e - 1)\gamma \rangle.$$

Эта подгруппа содержит раст  $\delta + \alpha = \beta - \alpha + \alpha = \beta$ , следовательно,  $\langle \alpha, \delta, \gamma \rangle = \mathbf{P}_W^3$  и одули Ли  $\mathbf{P}_W^3$  и  $\mathbf{P}_V^3$  совпадают, как алгебраические структуры. Имеет место разложение  $\mathbf{P}_W^3 = \mathbf{P}^2 + \mathbf{L}^1$ . Таким образом, различные виды операций на одном и том же одуле Ли выделяют различные свойства одуля Ли, что естественно приводит к различным геометриям с одним и тем же одулем Ли, построенным в одной схеме.

### 1.3 Пространство-время с W-растраном с 2-мерным временем

Пусть  $\Lambda$  – непустое множество, элементы которого называются точками и обозначаются  $A, B, \dots$ . Рассматривается отображение пар точек в W-растран  $\mathbf{P}_W^{3,2}$ , удовлетворяющее аксиомам Г. Вейля аффинного пространства, в которых линейное пространство заменено W-растраном [3], это одно из вейлевских одулярных пространств – ВО-пространств [2]. По размерности W-растрана  $\mathbf{P}_W^{3,2}$  оно считается 3-мерным, называется WЛ-пространством и обозначается  $\Lambda_W^3$ . В работе [2, с. 136] введено ВО-пространство с однородным растраном, называемое ЛМ-пространством, а также ЕМ-пространство – это ВО-пространство с нормированным однородным растраном. Изучаем WЛ-пространство  $\Lambda_W^3$ , используя аналогию с ЛМ- и ЕМ-пространствами.

Точка  $O$  из  $\Lambda_W^3$  и базис  $B = (\alpha, \beta, \gamma)$  W-растрана  $\mathbf{P}_W^3$  задают репер  $V = (O, \alpha, \beta, \gamma)$  WЛ-пространства  $\Lambda_W^3$ . Всякой паре точек  $(A, B)$  из  $\Lambda_W^3$  соответствует единственный раст  $AB$ . Если  $\mu = OM = (x^1, x^2, x)$  в базисе  $B$ , то координаты точки  $M$  в репере  $V$  есть  $M(x^1, x^2, x)$ . Две точки  $A(a^1, a^2, a)$  и  $B(b^1, b^2, b)$  определяют раст

$$AB = (b^1 - a^1, b^2 - a^2, b - ae^{b^1 + b^2 - a^1 - a^2}). \quad (6)$$

Точка  $A$  и раст  $\rho = (r^1, r^2, r)$  порождают прямую  $\langle A, \rho \rangle$ , параметрические уравнения которой таковы:

$$x^1 = tr^1 + a^1, \quad x^2 = tr^2 + a^2, \quad x = r \frac{e^{(r^1 + r^2)t} - 1}{e^{(r^1 + r^2)} - 1} + ae^{(r^1 + r^2)t}. \quad (7)$$

В случае  $r^1 + r^2 \neq 0$  уравнения прямой  $\langle A, \rho \rangle$  нелинейны; если  $r^1 + r^2 = 0$ , то уравнения прямой являются линейными:

$$x^1 = tr^1 + a^1, \quad x^2 = tr^2 + a^2, \quad x = rt + a. \quad (8)$$

Уравнения прямой  $\langle A, \rho \rangle$  нелинейны, если раст  $\rho$  прямой галилеев и его временная составляющая неизотропна; и линейны в случае, если временная составляющая раста этой прямой изотропна или раст прямой евклидов.

На W-растране рассмотрим галилееву норму (3), т.е. рассматриваем W-растран  $\mathbf{P}_W^{3,2}$ . Введение нормы превращает WЛ-пространство в WM-пространство-время  $M_W^3$ , время в котором 2-мерно. Всякое событие  $M(x^1, x^2, x)$  в  $M_W^3$  имеет две временные координаты  $x^1, x^2$  и одну пространственную координату  $x$ .

Всякие два базисных раста порождают 2-мерные подрастраны, подрастран  $\langle \alpha, \beta \rangle$  коммутативен, является векторным пространством  $\mathbf{T}^2$ , подра-

страны  $\langle \alpha, \gamma \rangle$  и  $\langle \beta, \gamma \rangle$  являются 2-мерными подрастрами. В указанных подрастрах операции (1) и (2) принимают, соответственно, следующий вид:

$$- \text{в } \langle \alpha, \beta \rangle: (x^1, x^2, 0) + (y^1, y^2, 0) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, 0);$$

$$t(x^1, x^2, 0) = (tx^1, tx^2, 0), x^1 + x^2 \neq 0; t(x^1, x^2, 0) = (tx^1, tx^2, 0), x^1 + x^2 = 0, t \in \mathbf{R};$$

$$- \text{в } \langle \alpha, \gamma \rangle: (x^1, 0, x) + (y^1, 0, y) = (x^1 + y^1, 0, xe^{y^1} + y);$$

$$t(x^1, 0, x) = (tx^1, 0, x \frac{e^{x^1 t} - 1}{e^{x^1} - 1}), x^1 \neq 0; t(0, 0, x) = (0, 0, tx), t \in \mathbf{R};$$

$$- \text{в } \langle \beta, \gamma \rangle: (0, x^2, x) + (0, y^2, y) = (0, x^2 + y^2, xe^{y^2} + y);$$

$$t(0, x^2, x) = (0, tx^2, x \frac{e^{x^2 t} - 1}{e^{x^2} - 1}), x^2 \neq 0; t(0, 0, x) = (0, 0, tx), t \in \mathbf{R}.$$

Координатная плоскость  $\langle O, \alpha, \beta \rangle$  является 2-мерным временным пространством, состоит из точек-событий  $(x^1, x^2, 0)$ . Как уже отмечалось, согласно определению галилеевой нормы (3), норма раста  $\rho = (x^1, x^2, 0)$  равна

$$\|\rho\| = |x^1 + x^2|.$$

По формуле (6) расстояние между событиями  $A(a^1, a^2, 0)$  и  $B(b^1, b^2, 0)$  равно

$$|AB| = |b^1 + b^2 - a^1 - a^2|.$$

Координатная плоскость  $\langle O, \alpha, \gamma \rangle$  состоит из событий  $(x^1, 0, x)$ . На основании (3) для растов  $\rho = (x^1, 0, x)$  имеем

$$\|\rho\| = \begin{cases} |x^1|, & \text{если } x^1 \neq 0; \\ |x|, & \text{если } x^1 = 0. \end{cases}$$

Расстояние между событиями  $A(a^1, 0, a)$  и  $B(b^1, 0, b)$  по (6) таково:

$$|AB| = \begin{cases} |b^1 - a^1|, & \text{если } b^1 \neq a^1; \\ |b - a|, & \text{если } b^1 = a^1. \end{cases}$$

Это обычная галилеева плоскость с нормированным растром такая же, как галилеевы плоскости в ЕМ-пространстве  $M^3$  с однородным нормированным растром  $\mathbf{P}^3$ , см. [1].

Свойства координатной плоскости  $\langle O, \beta, \gamma \rangle$  такие же, как и галилеевой координатной плоскости  $\langle O, \alpha, \gamma \rangle$ .

События  $M$  одновременны с событием  $A(a^1, a^2, a)$ , если  $M(a^1, x^2, x)$  или  $M(x^1, a^2, x)$ , или  $M(a^1, a^2, x)$ . Множество событий  $M(a^1, x^2, x)$  составляет галилееву плоскость  $\langle A, \beta, \gamma \rangle$ , проходящую через точку  $A$  и определяемую растами  $\alpha, \gamma$ ; множество событий  $M(x^1, a^2, x)$  составляет галилееву плоскость  $\langle A, \alpha, \gamma \rangle$ . Множество событий  $M(a^1, a^2, x)$  совпадает с пересечением плоскостей  $\langle A, \beta, \gamma \rangle$  и  $\langle A, \alpha, \gamma \rangle$ , это прямая  $\langle A, \gamma \rangle$ .

На основании (3) заключаем, что галилеево WM-пространство-время  $M_W^3$  не содержит евклидовых плоскостей.

## 2 Кривые WM-пространства

### 2.1 Регулярные кривые

Кривой или линией в WM-пространстве  $M_W^3$  называется отображение  $\rho$  некоторого числового интервала  $I \subseteq \mathbf{R}$  в пространство  $M_W^3$ . Числу  $t$  соответствует точка  $M$  из  $M_W^3$ , которая является функцией параметра  $t$ , пробегающего интервал  $I$ . Класс отображения называется классом кривой. Рассматриваются кривые класса  $C^3$ . Кроме того, считаем  $\rho' \neq \emptyset$ , т.е. кривые считаем регулярными. Точки регулярной кривой называются обыкновенными. Изучаем кривые в окрестности их обыкновенных точек. Положим:  $M(t) = (x^1(t), x^2(t), x(t))$ . Кривая является следующим множеством точек:

$$l = \{ OM \mid OM = \rho(t), t \in I \},$$

точка  $M$  определяется растом  $OM = \rho(t)$  и описывается векторной функцией

$$\rho = \rho(t) = (x^1(t), x^2(t), x(t)), t \in I. \quad (9)$$

Функция  $\rho(t) = (x^1, x^2, x)$ , компоненты которой задаются равенствами (7) или (8), является регулярной класса  $C^3$ ,  $\rho'(t) \neq \emptyset$ . Такая функция задает прямую линию.

Вдоль регулярной кривой  $\rho(t)$  WM-пространства  $M_W^3$  определено касательное отображение в W-растран  $P_W^3$ . Точке  $P(t)$  кривой (9) соответствует раст касательной  $\rho'(t)$  (4).

Пусть в (9) функции  $x^1(t), x^2(t)$  непостоянны. Ввиду регулярности кривой (9) эти функции обратимы. Используя  $t = t(x^1)$  или  $t = t(x^2)$  от параметризации (9) переходим к параметризациям

$$\rho(x^1) = (x^1, x^2(x^1), x(x^1)) \text{ или } \rho(x^2) = (x^1(x^2), x^2, x(x^2)).$$

Учитывая, что первая и вторая компоненты векторов  $\rho(x^1), \rho(x^2)$  являются временными, и обозначая параметры  $t^1, t^2$ , перепишем полученные функции в новых обозначениях:

$$\rho(t^1) = (t^1, x^2(t^1), x(t^1)), \text{ и } \rho(t^2) = (x^1(t^2), t^2, x(t^2)). \quad (10)$$

В общем случае в задании кривой одна временная компонента есть функция другой временной компоненты. Если такой зависимости не существует, то кривые в WM-пространстве задаются функциями

$$\rho(t^1) = (t^1, C, x(t^1)), \text{ и } \rho(t^2) = (C, t^2, x(t^2)), \quad (11)$$

полученными из (10). Это линии в 2-мерных подпространствах WM-пространства, являющихся галилеевыми плоскостями с растрасом. Такие кривые изучаются в [2, с. 137–148]. Из кривых (10) достаточно рассмотреть первую, свойства второй кривой такие же, как свойства первой. Ниже рассмотрим случай зависимости временных компонент в задании кривых, но учитываем и независимость этих компонент.

## 2.2 Естественная параметризация кривой

Напомним, что параметризация кривой евклидова пространства

$$\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

называется естественной, если параметр  $s$  есть длина дуги кривой, отсчитываемый от некоторой ее точки. В этом случае вектор касательной  $\dot{\vec{r}}$  к кривой имеет постоянную единичную длину. Производная  $\ddot{\vec{r}}$  вектора касательной  $\dot{\vec{r}}$  ему перпендикулярна, определяет главную нормаль кривой  $\vec{r}(s)$ ,  $|\ddot{\vec{r}}(s)|$  есть функция кривизны кривой  $\vec{r}(s)$ . В этой же схеме изучаются кривые галилеевых пространств. В одулярных галилеевых пространствах с 1-мерным временем, в том числе и в случае, если одуль пространства является векторным пространством, рассматриваются кривые в естественной параметризации

$$\omega(t) = (t, x(t), y(t)),$$

параметр  $t$  есть время. Длина дуги кривой от точки  $P(t_0)$  до точки  $M(t)$  равна  $|t - t_0|$ , одуляр производной  $\dot{\omega}$  является галилеевым, норма одуляра производной  $|\dot{\omega}|$  постоянна и равна 1; одуляр производной второго порядка  $\ddot{\omega}$  является евклидовым вектором, перпендикулярным к  $\dot{\omega}$ ;  $|\ddot{\omega}|$  есть функция кривизны галилеевой кривой  $\omega(t)$ .

Для кривых WM-пространства  $M_W^3$  введем естественную параметризацию. Для того чтобы параметр  $t$  кривой (9) был естественным, должны выполняться условия:

$$\|\dot{\rho}(t)\| = 1,$$

$\ddot{\rho}(t)$  – евклидов раст.

Записываем эти условия в координатах:

$$|\dot{x}^1 + \dot{x}^2| = 1, \quad \ddot{x}^1 + \ddot{x}^2 = 0. \quad (12)$$

От параметризации (9) переходим к параметризации вида (10); записываем функцию (9) в форме

$$\rho(t) = (pt, x^2(t), x(t)), \quad p \neq 0, \quad p = \text{const}. \quad (13)$$

Здесь  $x^1 = pt$ . Условия (12) означают:

$$|p + \dot{x}^2| = 1, \quad \ddot{x}^2 = 0,$$

откуда следует, что

$$x^2(t) = (1 - p)t + c.$$

Можно считать  $c = 0$ . Кривая (13) приобретает вид

$$\rho(t) = (pt, (1 - p)t, x(t)), \quad t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}. \quad (14)$$

Полученная параметризация включает в себя оба случая (11) при  $p = 1$  и при  $p = 0$ .

Раст производной первого порядка функции (14) таков:

$$\dot{\rho} = (p, 1 - p, (e - 1)(\dot{x} - x)). \quad (15)$$

Согласно (3) в любой точке кривой (14):  $\|\dot{\rho}(t)\| = 1$ . Это единичный галилеев раст. Пусть  $P(t_0) = \rho(t_0)$  – фиксированная точка кривой (14),  $M(t) = \rho(t)$  – ее произвольная точка. Находим:

$$\begin{aligned} -\rho(t_0) + \rho(t) &= (p(t - t_0), (1 - p)(t - t_0), x(t) - x(t_0)e^{t - t_0}), \\ |PM| &= |p(t - t_0) + (1 - p)(t - t_0)| = |t - t_0|. \end{aligned}$$

Таким образом, получена естественная параметризация (14) кривой WM-пространства-времени  $M_{\mathcal{W}}^3$ .

### 2.3 Кривизна и кручение кривой

Как во всех галилеевых пространствах, см. [2], кривизну кривой (14) пространства  $M_{\mathcal{W}}^3$  в естественной параметризации определим на основе нормы второй производной  $\ddot{\rho}$ . Дифференцируем функцию (15) согласно п. 1.1:

$$\ddot{\rho}(t) = (0, 0, (e - 1)(\ddot{x}(t) - \dot{x}(t))). \quad (16)$$

Норма раста  $\ddot{\rho}$  есть

$$\|\ddot{\rho}\| = (e - 1)|\ddot{x} - \dot{x}|.$$

По аналогии с теорией кривых EM-пространства с однородным растраним полагаем по определению

$$k = \frac{1}{e - 1} \|\ddot{\rho}\|,$$

или в координатах:

$$k = |\ddot{x} - \dot{x}|, \quad (17)$$

кривизна кривой (14) равна норме раста второй производной от функции, задающей кривую в естественной параметризации. Функция

$$k(t) = \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) \quad (18)$$

называется функцией кривизны кривой (14).

Кручение кривой всякого галилеева пространства определяется как норма производной  $\dot{v}$ , где  $v = \frac{\ddot{\rho}}{k}$  [2]. По формуле (17),  $v = (0, 0, e - 1)$ , вектор постоянен,  $\dot{v} = \emptyset$ . Поэтому кручение всякой кривой галилеева пространства  $M_W^3$  равно нулю.

Для примера подсчитаем кривизну прямой линии WM-пространства-времени  $M_W^3$ . Прямая  $\langle A, \rho \rangle$  обладает следующим свойством: если  $\sigma = t\rho$ ,  $t \neq 0$ , то  $\langle A, \rho \rangle = \langle A, \sigma \rangle$ . Пусть прямая  $\langle A, \rho \rangle$  определяется галилеевым растом  $\rho = (r^1, r^2, r)$ , т.е.  $r^1 + r^2 \neq 0$ . Возьмем раст  $\sigma = u\rho$ , где  $u = \frac{1}{r^1 + r^2}$ . Тогда  $\sigma = (p, 1 - p, s)$ , где  $p = \frac{r^1}{r^1 + r^2}$ ,  $s = \frac{e - 1}{e^{u^{-1}} - 1}$ . Всякая прямая с галилеевыми растами, проходящая через точку  $H(h^1, h^2, h)$ , описывается параметрическими уравнениями вида (7):

$$x^1 = pt + h^1, \quad x^2 = (1 - p)t + h^2, \quad x = s \frac{e^t - 1}{e - 1} + he^t. \quad (19)$$

Эта параметризация тоже является естественной, т.к. условия (12) выполняются. Находим

$$\dot{x} = \frac{s}{e - 1} e^t + he^t, \quad \ddot{x} = \frac{s}{e - 1} e^t + he^t; \quad \ddot{x} - \dot{x} = 0.$$

По формуле (17) кривизна прямой линии с галилеевыми векторами равна нулю.

Прямая (8) определяется евклидовым вектором, для которого  $r^1 + r^2 = 0$ . В таком случае расстояния по прямой измеряются по третьей компоненте, а эти расстояния евклидовы. Кривизна евклидовой прямой равна нулю.

## 2.4 Натуральные уравнения кривой

В геометрии пространства  $M_W^3$ , как и в других геометриях, возникает задача о нахождении кривой  $\rho(t)$  по заданной функции кривизны. Если функция кривизны  $k(t)$  известна, то, по (18), задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} = k(t). \quad (20)$$

Замена  $\dot{x} = u$  позволяет понизить порядок уравнения

$$\dot{u} - u = k(t).$$

Решением последнего уравнения является функция

$$u(t) = \left( \int k(t) e^{-t} dt + c \right) e^t,$$

теперь решение уравнения (20) находится в результате интегрирования:

$$x = \int \left( \int k(t) e^{-t} dt + c \right) e^t dt. \quad (21)$$

Единственность решения уравнения (20) обеспечивается начальными условиями:

$$t = t_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0.$$

По найденной функции  $x = x(t)$  – решению уравнения (20), записываем параметрические уравнения кривой с полученной пространственной компонентой (21) при условии, что задано направление во времени  $\tau = (p, 1-p, 0)$ ,  $p$  – постоянная,

$$\rho(t) = (pt, (1-p)t, \int \left( \int k(t) e^{-t} dt + c \right) e^t dt). \quad (22)$$

Кривизна найденной кривой  $\rho(t)$  равна модулю заданной функции  $|k(t)|$ .

Таким образом, функция кривизны  $k(t)$  является натуральным уравнением кривой галилеева WM-пространства-времени  $M_W^3$  с растром  $\mathbf{P}_W^{3,2}$  с 2-мерным временем.

Приведем примеры получения векторных функций, описывающих кривую, по заданной скалярной функции кривизны.

**Пример 1.**  $k(t) = k$  – кривизна линии постоянна.

Находим функцию  $x = x(t)$  по формуле (21):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \left( \int k e^{-t} dt + C_1 \right) e^t dt = \int (-k e^{-t} + C_1) e^t dt = \\ &= \int (-k + C_1 e^t) dt = -kt + C_1 e^t + C_2. \end{aligned}$$

Пусть направление во времени есть  $\tau = (p, 1-p, 0)$ ,  $p$  – постоянная. Имеем кривые:

$$\rho(t) = (pt, (1-p)t, -kt + C_1 e^t + C_2).$$

Все указанные кривые имеют кривизну  $k$ . В частности:

– если  $p = 0$ , то  $\rho(t) = (0, t, -kt + C_1 e^t + C_2)$ ;

– если  $p = 1$ , то  $\rho(t) = (t, 0, -kt + C_1 e^t + C_2)$ .

В случае  $k \neq 0$  начальные условия  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = -k$  выделяют кривую

$$\rho(t) = (pt, (1-p)t, -kt).$$

При  $k = 0$  функция (21) есть  $x(t) = C_1 e^t + C_2$ . С начальными условиями

$t_0 = 0$ ,  $x_0 = -\frac{s}{e-1}$ ,  $\dot{x}_0 = \frac{s}{e-1} + a$  получаем линию

$$\rho(t) = \left( pt, (1-p)t, s \frac{e^t - 1}{e - 1} + at \right).$$

Полученная растранный функция описывает прямую  $\langle A, \rho \rangle$ , где  $A(0, 0, a)$ ,  $\rho = (p, 1-p, s)$ , см. (19).

**Пример 2.**  $k(t) = t$ . Имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \left( \int t e^{-t} dt + C_1 \right) e^t dt = \int \left( (-t-1)e^{-t} + C_1 \right) e^t dt = \\ &= \int (-t-1 + C_1 e^t) dt = -\frac{t^2}{2} - t + C_1 e^t + C_2. \end{aligned}$$

Получено семейство кривых вида (21)

$$\rho(t) = \left( pt, (1-p)t, -\frac{t^2}{2} - t + C_1 e^t + C_2 \right).$$

В случае  $k(t) = t^2$  определяется семейство

$$\rho(t) = \left( pt, (1-p)t, -\frac{t^3}{3} - t^2 - 2t + C_1 e^t + C_2 \right).$$

Вообще, для функции кривизны  $k(t) = t^n$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \left( \int t^n e^{-t} dt + C_1 \right) e^t dt = \int \left( t^n e^{-t} + n \int t^{n-1} e^{-t} dt + C_1 e^t \right) dt = \\ &= \int \left( t^n + e^t n \int t^{n-1} e^{-t} dt + C_1 e^t \right) dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + n \int e^t \int t^{n-1} e^{-t} dt + C_1 e^t + C_2. \end{aligned}$$

Таким образом, степень параметра  $t$  в подынтегральном выражении уменьшилась на 1; применяя рекурсию, находим  $x(t)$ . Но возможен другой способ решения – представить интеграл  $\int t^n e^{-t} dt$  в виде суммы ряда, тогда

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \left( \int t^n e^{-t} dt + C_1 \right) e^t dt = \\ &= \int \left( e^{-t} \left( -t^n - n t^{n-1} - n(n-1) t^{n-2} - \dots - (n-1)! t - n! \right) + C_1 \right) e^t dt = \\ &= \int \left( -t^n - n t^{n-1} - n(n-1) t^{n-2} - \dots - (n-1)! t - n! + C_1 e^t \right) dt = \\ &= -\frac{t^{n+1}}{n+1} - t^n - n t^{n-1} - n(n-1) t^{n-2} - \dots - \frac{n! t^2}{2} - n! t + C_1 e^t = \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{t^i (n+1)!}{i!} + C_1 e^t + C_2. \end{aligned}$$

Получается соответствующее семейство кривых  $\rho(t)$  с функцией кривизны  $k(t) = t^n$ .

**Пример 3.** Функция кривизны  $k(t) = \frac{t}{(1-t)^2}$  определяет пространственную составляющую  $x(t)$  галилеевой кривой  $\rho(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \left( \int \frac{te^{-t}}{(1-t)^2} dt + C_1 \right) e^t dt = \int \left( \frac{e^{-t}}{1-t} + C_1 \right) e^t dt = \\ &= \int \left( \frac{1}{1-t} + C_1 e^t \right) dt = -\ln|-t+1| + C_1 e^t + C_2 \end{aligned}$$

и семейство кривых  $\rho(t)$  вида (22) с полученной функцией  $x(t)$  пространственной составляющей.

**Пример 4.**  $k(t) = \frac{1}{t^n}$ . Находим рекурсивную формулу для  $x(t)$  из (21):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \left( \int \frac{e^{-t}}{t^n} dt + C_1 \right) e^t dt = \int \left( -\frac{e^{-t}}{(n-1)t^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{e^{-t} dt}{t^{n-1}} + C_1 \right) e^t dt = \\ &= \int \left( -\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} - \frac{e^t}{n-1} \int \frac{e^{-t} dt}{t^{n-1}} + C_1 e^t \right) dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)t^{n-2}} - \frac{1}{n-1} \int \int \frac{e^{-t} dt}{t^{n-1}} dt + C_1 e^t. \end{aligned}$$

Возможен другой вариант:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \left( \int \frac{e^{-t}}{t^n} dt + C_1 \right) e^t dt = \\ &= \int \left( -\frac{e^{-t}}{(n-1)t^{n-1}} + \frac{e^{-t}}{(n-1)(n-2)t^{n-2}} - \dots - \frac{(-1)^n e^{-t}}{(n-1)!t} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} \int \frac{e^{-t} dt}{t} + C_1 \right) e^t dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)t^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-3}} + \dots - \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \ln|t| + \\ &+ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int e^t \int \frac{e^{-t} dt}{t} dt + C_1 e^t = \frac{1}{(n-1)(n-2)t^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-3}} + \dots \\ &\dots - \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \ln|t| + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int e^t \left( \ln|t| - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2 \cdot 2!} - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \dots - \frac{(-1)^n t^n}{n \cdot n!} + \dots \right) dt + C_1 e^t, \end{aligned}$$

и семейство кривых  $\rho(t)$  вида (22).

**Пример 5.** Для функции кривизны  $k(t) = \sin t$  получаем

$$\begin{aligned}x(t) &= \int \left( \int e^{-t} \sin t dt + C_1 \right) e^t dt = \int \left( \frac{-\sin t - \cos t}{2} e^{-t} + C_1 \right) e^t dt = \\ &= \int \left( -\frac{\sin t - \cos t}{2} + C_1 e^t \right) dt = \frac{\cos t}{2} - \frac{\sin t}{2} + C_1 e^t + C_2.\end{aligned}$$

В случае  $k(t) = \sin^n t$  для  $x(t)$  имеется рекурсивная формула

$$\begin{aligned}x(t) &= \int \left( \int e^{-t} \sin^n t dt + C_1 \right) e^t dt = \\ &= \int \left( e^{-t} \frac{\sin^{n-1} t}{n} (-\sin t - n \cos t) + \frac{n-1}{n} \int e^{-t} \sin^{n-2} t dt + C_1 \right) e^t dt = \\ &= \frac{1}{n} \int e^{-t} \sin^{n-1} t \cdot (-\sin t - n \cos t) dt + \frac{n-1}{n} \int \int e^{-t} \sin^{n-2} t dt dt + C_1 e^t.\end{aligned}$$

Далее записывают кривые вида (22).

#### Список литературы

1. **Сабинин, Л. В.** Одули как новый подход к геометрии со связностью / Л. В. Сабинин // ДАН СССР. – 1977 – № 5. – С. 800–803.
2. **Долгарев, А. И.** Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств. / А. И. Долгарев. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2005. – 306 с.
3. **Зелева, Е. В.** Растрян с 2-мерным временем / Е. В. Зелева, А. И. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 3. – С. 30–38.

---

#### **Долгарев Артур Иванович**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет

#### **Dolgarev Artur Ivanovich**

PhD in Mathematics, associate professor,  
sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling,  
Penza State University

#### **Зелева Елена Владимировна**

студент, Пензенский государственный  
университет

#### **Zeleva Elena Vladimirovna**

graduate student,  
Penza State University

---

УДК 514.7

**Долгарев, А. И.**

**Кривые 3-мерного галилеева пространства с растром с 2-мерным временем / А. И. Долгарев, Е. В. Зелева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 55–68.**

## ПОВЕРХНОСТИ В КОММУТАТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ГЕОМЕТРИИ 3-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ГАЛИЛЕЯ

*Аннотация.* Изучаются поверхности одного из 3-мерных пространств Галилея с коммутативной и нелинейной геометрией. Линейное пространство определено на тройках действительных чисел, в компонентах троек операции заданы нелинейными функциями. Для векторов введено галилеево скалярное произведение. Получены формулы дифференцирования векторных функций. В аксиоматике Г. Вейля на основе указанного линейного пространства строится пространство-время Галилея. Уравнения прямых и плоскостей полученного пространства нелинейны. Определены регулярные поверхности, ее первая и вторая квадратичные формы, нормальная кривизна поверхности, полная и средняя кривизны. Проведена классификация обыкновенных точек поверхностей. Вычислена полная кривизна некоторых поверхностей.

*Ключевые слова:* нелинейная коммутативная геометрия Галилея, кривизна поверхности.

*Abstract.* For vectors determine not linear and commutative operation and Galilean inner product of vector. Formulas to differentiate vector functions are obtained. Equations straight line and plane to be not linear. Obtained normal, middle and complete curvature surface. Have a examples.

*Keyword:* not linear and commutative geometry of Galilei, curvature surface.

Геометрической основой физического принципа относительности Галилея является галилеева геометрия. Известны разнообразные геометрические системы и еще предстоит выяснить, какая из них лучше соответствует реальной картине окружающего мира. Галилеевы геометрии строятся в аксиоматике Г. Вейля с использованием линейного пространства и его обобщения – одуля Ли. Коммутативная и линейная геометрия Галилея 3-мерного пространства-времени  $\Gamma^3$  [1] базируется на арифметическом пространстве  $\mathbf{R}^3$ , где  $\mathbf{R}$  – поле действительных чисел с операциями

$$(x, x^1, x^2) + (y, y^1, y^2) = (x + y, x^1 + y^1, x^2 + y^2);$$

$$u(x, x^1, x^2) = (xu, x^1u, x^2u), \quad u \in \mathbf{R},$$

на котором введено галилеево скалярное произведение векторов. Галилеевым скалярным произведением векторов  $\vec{p} = (x, x^1, x^2)$ ,  $\vec{q} = (y, y^1, y^2)$  называется [1, с.46]

$$\vec{p}\vec{q} = \begin{cases} xy, & \text{если } x \neq 0 \text{ или } y \neq 0; \\ x^1y^1 + x^2y^2, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Пространство  $\mathbf{R}^3$  с указанным скалярным произведением векторов называется галилеевым векторным пространством и обозначается  $\mathbf{V}_\Gamma^3$ . Первая

компонента векторов называется временной, оставшиеся компоненты называются пространственными. Векторное пространство  $V_{\Gamma}^3$  является прямой суммой евклидовых пространств:  $V_{\Gamma}^3 = V^1 + V^2$ , для сравнения см. [2, с. 11–18]. Геометрия коммутативного и линейного пространства-времени Галилея  $\Gamma^3$  изучается в [1, с. 46–101]. Имеется несколько некоммутативных галилеевых геометрий, это одулярные геометрии. 3-мерный одуль Ли задается операциями на многообразии  $\mathbf{R}^3$ . Один из этих одулей Ли – сибсон  $\Sigma^3$  – определяется операциями [1, с. 107]

$$(x, x^1, x^2) + (y, y^1, y^2) = (x + y, x^1 + y^1, x^2 + y^2 + x^1 y);$$

$$u(x, x^1, x^2) = \left( xu, x^1 u, x^2 u + x x^1 \frac{(u-1)u}{2} \right), u \in \mathbf{R}.$$

Для элементов сибсона определено скалярное произведение, как для векторов из  $V_{\Gamma}^3$ . Соответствующая геометрия изложена в [1].

В работах [3, 4] начато построение 2-мерного аффинного пространства, линейное пространство  ${}^a L^2$  которого задано на многообразии  $\mathbf{R}^2$  операциями

$$(x, u) + (y, v) = (x + y, u + v + xy); t(x, u) = \left( xt, ut + x^2 \frac{(t-1)t}{2} \right), t \in \mathbf{R}.$$

Операции над векторами определены нелинейными функциями. Для приведенных операций выполнены все аксиомы линейного пространства [3]. Линейное пространство  ${}^a L^2$  порождается векторами вида  $(x, 0)$  и в прямую сумму 1-мерных линейных пространств не разлагается.

Ниже мы распространим операции над векторами пространства  ${}^a L^2$  на тройки из  $\mathbf{R}^3$ , используя аналогию с операциями на сибсоне. Введем на 3-мерном линейном пространстве  ${}^a L_1^3$  с нелинейными функциями операций галилеево скалярное произведение векторов и получим некоторые факты нелинейной и коммутативной геометрии Галилея.

## **1 Пространство Галилея с нелинейной коммутативной геометрией**

### **1.1 Галилеево векторное пространство с нелинейными операциями**

На многообразии  $\mathbf{R}^3$  зададим операции

$$(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v + xu, z + w); \quad (1)$$

$$t(x, y, z) = \left( xt, yt + x^2 + \frac{(t-1)t}{2}, zt \right), t \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Результаты операций в третьей компоненте троек из  $\mathbf{R}^3$  не влияют на результаты операции в первой и второй компонентах. Поэтому можно воспользоваться свойствами операций векторов из  ${}^a L^2$  [3]; на основании чего получаем следующее утверждение.

**Лемма 1.** Многообразие  $\mathbf{R}^3$  с операциями (1) и (2) является действительным линейным пространством. #

Полученное линейное пространство обозначается  ${}^a\mathbf{L}_1^3$ , его векторы обозначаются  $\alpha, \beta, \dots$ ; нулевой вектор есть  $\vartheta = (0, 0, 0)$ ; вектор, противоположный вектору  $v = (x, y, z)$ , равен  $-v = (-x, -y + x^2, -z)$ . Если

$$\alpha = (1, 0, 0), \beta = (0, 1, 0), \gamma = (0, 0, 1),$$

то для вектора  $v$  имеется однозначное разложение [3]

$$v = (x, y, z) = x\alpha + \left( y - \frac{(x-1)x}{2} \right) \beta + z\gamma,$$

и векторы  $\alpha, \beta, \gamma$  составляют базис  $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, \gamma)$  линейного пространства  ${}^a\mathbf{L}_1^3$ . На основании операций (1), (2) справедлива

**Лемма 2.** Линейное пространство  ${}^a\mathbf{L}_1^3$  является прямой суммой 2-мерного линейного пространства  ${}^a\mathbf{L}^2$  и 1-мерного линейного пространства  $\mathbf{L}^1$ :

$${}^a\mathbf{L}_1^3 = {}^a\mathbf{L}^2 + \mathbf{L}^1;$$

линейное пространство  ${}^a\mathbf{L}^2$  состоит из векторов  $(x, y, 0)$  и порождается векторами  $(x, 0, 0)$  (но не вектором  $(1, 0, 0) = \alpha$ ) линейное пространство  $\mathbf{L}^1$  состоит из векторов  $(0, 0, z)$  и порождается вектором  $\gamma$ :  $\mathbf{L}^1 = \langle \gamma \rangle$ . #

Галилеевым скалярным произведением векторов  $v$  и  $\mu = (u, v, w)$  называется число

$$v\mu = \begin{cases} xu, & \text{если } x \neq 0 \text{ или } uv \neq 0; \\ yv + zw, & \text{если } x = u = 0. \end{cases}$$

Галилеев скалярный квадрат вектора  $v$  равен

$$v^2 = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0; \\ y^2 + z^2, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Галилеевой нормой вектора  $v$  называется  $|v| = \sqrt{v^2}$ , имеем

$$|v| = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \neq 0; \\ \sqrt{y^2 + z^2}, & \text{если } x = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Компонента  $x$  вектора  $v$  называется временной, компоненты  $y, z$  называются пространственными. Векторы  $(0, y, z)$  называются евклидовыми, для них используются обозначения  $\vec{r} = (0, y, z)$ , а векторы  $v = (x, y, z)$ ,  $x \neq 0$ , называются галилеевыми. Для евклидовых векторов используются также обозначения  $\vec{a}, \vec{r}, \dots$ . Всякий Галилеев вектор перпендикулярен всякому евклидову вектору, т.к.  $\vec{r}v = 0$ , если  $\vec{r} = (0, y, z)$ .

Векторное пространство с галилеевым скалярным произведением векторов называется галилеевым векторным пространством и в нашем случае обозначается  ${}^a\mathbf{V}_{\Gamma}^3$ , оно является прямой суммой 2-мерного галилеева векторного пространства  $\mathbf{V}_{\Gamma}^2$  и 1-мерного временного векторного пространства  $\mathbf{V}^1$ :

$${}^a\mathbf{V}_{\Gamma}^3 = \mathbf{V}_{\Gamma}^2 + \mathbf{V}^1,$$

$\mathbf{V}_{\Gamma}^2$  состоит из векторов  $(x, y, 0)$ ,  $\mathbf{V}^1$  состоит из векторов  $(0, 0, z)$ . Базис  $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, \gamma)$  пространства  ${}^a\mathbf{V}_{\Gamma}^3$  является ортонормированным.

Упорядоченная тройка действительных функций  $x(t), y(t), z(t)$  действительного параметра  $t$  с общей областью определения  $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$  называется векторной функцией, которая обозначается

$$\mathbf{v}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}.$$

Функция  $\mathbf{v}(t)$  принимает значения в галилеевом векторном пространстве  ${}^a\mathbf{V}_{\Gamma}^3$ . Считаем, что компоненты  $x(t), y(t), z(t)$  являются функциями класса  $C^3$ , в связи с чем говорим, что  $\mathbf{v}(t)$  есть галилеева функция класса  $C^3$ . Производной функцией  $\mathbf{v}'(t)$  функции  $\mathbf{v}(t)$  называется

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{v}'(t),$$

где  $\Delta t$  – приращение параметра  $t$ ;  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$  – приращение функции  $\mathbf{v}(t)$ .

**Теорема 1.** *Производная галилеевой векторной функции  $\mathbf{v}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$ , является следующей галилеевой векторной функцией:*

$$\mathbf{v}'(t) = \left( x'(t), y'(t) + x'(t) \left( \frac{1}{2} x'(t) - x(t) \right), z'(t) \right). \quad (4)$$

# Так как  $-\mathbf{v}(t) = (-x(t), -y(t) + x^2(t), -z(t))$ , см. п. 1.1, то, на основании сложения троек (1), получаем

$$\Delta \mathbf{v} = (x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t) - x(t)(x(t + \Delta t) - x(t)), z(t + \Delta t) - z(t)).$$

Далее, по формуле (2) с учетом обозначений  $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ ,  $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$ ,  $\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$  имеем

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \Delta \mathbf{v} = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} - x(t) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{1}{\Delta t} - 1 \right), \frac{\Delta z}{\Delta t} \right).$$

Предел галилеевой векторной функции вычисляется покомпонентно. Вычисления дают равенство (4). #

Проверка показывает, что правила дифференцирования функций со значениями в  ${}^a\mathbf{V}_{\Gamma}^3$  совпадают с правилами дифференцирования евклидовых векторных функций, т.е. справедливы следующие утверждения.

**Свойство 1.** Выполняются равенства:

а)  $(v(t) + \mu(t))' = v'(t) + \mu'(t)$ ;

б)  $(Cv(t))' = Cv'(t)$ , где  $C$  – постоянный множитель;

в) если компоненты векторной функции  $v(t)$  являются сложными функциями  $x(u(t)), y(u(t)), z(u(t))$ , то  $v'_t(u(t)) = u'_t v'_u(u(t))$ ;

г) если  $v = \text{const}$ , то  $(tv)' = v$ . #

**Свойство 2.** Если одна из компонент векторной функции  $v(t)$  постоянна, то формула дифференцирования (4) принимает один из видов:

$$(C, y(t), z(t))' = (0, y', z'); \quad (x(t), C, z(t))' = \left( x', x' \left( \frac{1}{2} x' - x \right), z' \right);$$

$$(x(t), y(t), C)' = \left( x', y' + x' \left( \frac{1}{2} x' - x \right), 0 \right);$$

если первая компонента функции  $v(t)$  есть время  $x(t) = t$ , то

$$(t, y(t), z(t))' = \left( 1, y' + \frac{1}{2} - t, z' \right),$$

и производная второго порядка галилеевой функции  $v(t)$  является евклидовой (пространственной) функцией:

$$(t, y(t), z(t))'' = (0, y'' - 1, z''). \quad \#$$

С использованием теоремы 1 и свойства 2 получается

**Теорема 2.** Частные производные функции двух параметров  $v(t, v)$  отыскиваются по тому же правилу, что и производные функции одного параметра:

$$v_v(t, v) = (x(t, v), y(t, v), z(t, v))_v = \\ = \left( x_v(t, v), y_v(t, v) + x_v(t, v) \left( \frac{1}{2} x_v(t, v) - x(t, v) \right), z_v(t, v) \right);$$

смешанные производные второго порядка не зависят от порядка дифференцирования:

$$v_{tv}(t, v) = v_{vt}(t, v).$$

В частных случаях выполняются равенства

$$v_t(t, v) = (t, y(t, v), z(t, v))_t = \left( 1, y_t(t, v) + \frac{1}{2} - t, z_v(t, v) \right);$$

$$v_v(t, v) = (t, y(t, v), z(t, v))_v = (0, y_v(t, v), z_v(t, v)). \quad \#$$

## 1.2 Пространство Галилея с векторным пространством ${}^a V_{\Gamma}^3$

Пусть  ${}^a \Gamma_1$  – непустое множество, элементы которого называются точками и обозначаются  $A, B, \dots$ , считаем, что дано галилеево векторное про-

пространство  ${}^a\mathbf{V}_{\Gamma}^3$  и отображение пар точек в  ${}^a\mathbf{V}_{\Gamma}^3$ . Вектор, соответствующий паре точек  $(A, B)$ , обозначаем  $\overline{AB}$ . Выполняются аксиомы Г. Вейля.

1. Для всякой точки  $A$  и всякого вектора  $v$  существует единственная точка  $B$  такая, что  $\overline{AB} = v$ .

2. Для любых трех точек  $A, B, C$ , если  $\overline{AB} = v$ ,  $\overline{BC} = \mu$ , то  $\overline{AC} = v + \mu$ .

Множество точек  ${}^a\Gamma_1$ , удовлетворяющее указанным условиям, называется пространством Галилея,  ${}^a\mathbf{V}_{\Gamma}^3$  называется векторным пространством пространства Галилея  ${}^a\Gamma_1$ . Размерность векторного пространства  ${}^a\mathbf{V}_{\Gamma}^3$  называется размерностью пространства Галилея, оно называется 3-мерным и обозначается в дальнейшем  ${}^a\Gamma_1^3$ . Векторы из  ${}^a\mathbf{V}_{\Gamma}^3$  называются векторами пространства  ${}^a\Gamma_1^3$ . Точка  $O$  из  ${}^a\Gamma_1^3$  и базис  $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, \gamma)$  галилеева векторного пространства  ${}^a\mathbf{V}_{\Gamma}^3$  составляют репер  $\mathbf{B} = (O, \alpha, \beta, \gamma)$  пространства Галилея. Координаты вектора  $\overline{OM}$  в базисе  $\mathbf{B}$  называются координатами точки  $M$  в репере  $\mathbf{B}$ . Если  $\overline{OM} = (x, y, z)$ , то точка  $M$  имеет координаты  $x, y, z$ , обозначение  $M(x, y, z)$ . Согласно определению галилеевой нормы векторов в п. 1.1, первая координата точки является временной, вторая и третья координаты являются пространственными, и пространство  ${}^a\Gamma_1^3$  называется пространством-временем Галилея, оно альтернативно классическому коммутативному пространству-времени Галилея  $\Gamma^3$ , изучаемому в [1, с. 46–101]. Точки пространства-времени  ${}^a\Gamma_1^3$  называются еще событиями. Изучаем пространство-время  ${}^a\Gamma_1^3$  по аналогии с пространством  $\Gamma^3$ .

**Лемма 3.** Пусть  $A(a, g, h)$  и  $B(b, c, d)$  – два события. Они определяют вектор

$$\overline{AB} = (b - a, c - g - a(b - a), d - h).$$

# Для трех точек  $O, A, B$  по второй аксиоме Г. Вейля выполняется:  $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$ , откуда  $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ . Как указано в п. 1.1,  $-\overline{OA} = (-a, -g + a^2, -h)$ , по (1) получаем координаты вектора  $\overline{AB}$ . #

**Теорема 3.** Расстояние  $|AB|$  между точками  $A(a, g, h)$  и  $B(b, c, d)$  равно

$$|AB| = \begin{cases} |b - a|, & \text{если } b \neq a; \\ \sqrt{(c - g)^2 + (d - h)^2}, & \text{если } b = a. \end{cases}$$

# Расстояние  $|AB|$  между точками  $A$  и  $B$  равно норме вектора  $\overline{AB}$ . По (3) и лемме 3 получаем указанное расстояние. #

Это такое же галилеево расстояние между точками, как и в классическом пространстве  $\Gamma^3$  [1]. События  $A$  и  $M(x, y, z)$  называются одновременными, если  $x = a$ . Множество событий  $M(a, y, z)$ , одновременных с событи-

ем  $A$ , составляет в  ${}^a\Gamma_1^3$  подпространство, являющееся евклидовой плоскостью. Через всякую точку пространства  ${}^a\Gamma_1^3$  проходит единственная евклидова плоскость.

Прямая, порожденная точкой  $A(a, g, h)$  и вектором  $\mu = (m, p, q)$  и обозначаемая  $\langle A, \mu \rangle$ , является множеством точек

$$\langle A, \mu \rangle = \{M \mid \overline{AM} = t\mu, t \in \mathbf{R}\}.$$

Так определяется прямая аффинного пространства.

**Теорема 4.** *Параметрические уравнения прямой  $\langle A, \mu \rangle$  таковы:*

$$x = mt + a, \quad y = (am + p)t + m^2 \frac{(t-1)t}{2} + g, \quad z = qt + h.$$

# Уравнения получаются с использованием леммы 3, операции (2) над векторами и условия равенства векторов: векторы равны, если и только если равны их соответствующие координаты. #

Если вектор  $\mu$  галилеев, то уравнения прямой пространства  ${}^a\Gamma_1^3$  нелинейны.

**Следствие.** *Уравнения прямой  $\langle A, \mu \rangle$  линейны только в случае  $m = 0$ , т.е. в случае, если вектор прямой является евклидовым, уравнения прямой в этом случае*

$$x = a, \quad y = pt + g, \quad z = qt + h. \quad \#$$

Уравнения координатных осей таковы:

$$\text{– ось } Ox = \langle O, \alpha \rangle: x = t, \quad y = \frac{(t-1)t}{2}, \quad z = 0;$$

$$\text{– ось } Oy = \langle O, \beta \rangle: x = 0, \quad y = t, \quad z = 0;$$

$$\text{– ось } Oz = \langle O, \gamma \rangle: x = 0, \quad y = 0, \quad z = t.$$

Плоскость  $\langle A, \mu, \nu \rangle$ , порожденная точкой  $A$  и неколлинеарными векторами  $\mu$  и  $\nu = (n, r, s)$ , есть, как и в аффинном пространстве, множество точек:

$$\langle A, \mu, \nu \rangle = \{M \mid \overline{AM} = u\mu + \nu\nu, (u, \nu) \in \mathbf{R}^2\}.$$

**Лемма 4.** *В векторном подпространстве  $\langle \mu, \nu \rangle$  пространства  ${}^a\mathbf{V}_{\Gamma}^3$ , порожденном галилеевыми векторами  $\mu, \nu$ , содержатся и евклидовы векторы.*

# Подпространство  $\langle \mu, \nu \rangle$  содержит вектор  $\mu\nu - \nu\mu$ , являющийся евклидовым. #

Поэтому вектор  $\nu$  в задании плоскости  $\langle A, \mu, \nu \rangle$  можно считать евклидовым, пусть  $\nu = (0, r, s)$ .

**Теорема 5.** *Плоскость  $\langle A, \mu, \nu \rangle$  пространства-времени Галилея  ${}^a\Gamma_1^3$ , где вектор  $\mu$  галилеев, а вектор  $\nu$  евклидов, описывается параметрическими уравнениями:*

$$x = tu + a, \quad y = (am + p)u + m^2 \frac{(u-1)u}{2} rv + g, \quad z = qu + sv + h.$$

Уравнения плоскости нелинейны. В случае, если оба вектора  $\mu, \nu$  евклидовы, т.е.  $m = n = 0$ , уравнение плоскости  $\langle A, \mu, \nu \rangle$  есть  $x = a$ . #

Координатные плоскости описываются уравнениями:

$$- \text{плоскость } Oxy = \langle O, \alpha, \beta \rangle: x = u, y = u + \frac{(u-1)u}{2} + v, z = 0;$$

$$- \text{плоскость } Oxz = \langle O, \alpha, \gamma \rangle: x = u, y = v, z = 0;$$

$$- \text{плоскость } Oyz = \langle O, \beta, \gamma \rangle: x = 0, y = u, z = v.$$

Плоскость  $Oxy$  является галилеевой  ${}^a\Gamma^2$  с нелинейной геометрией; плоскость  $Oxz$  обычная галилеева  $\Gamma^2$ , как все галилеевы плоскости в  $\Gamma^3$  [1]; плоскость  $Oyz$  евклидова.

## 2 Поверхности пространства ${}^a\Gamma_1^3$

### 2.1 Определение регулярной поверхности

Отображение  $\delta$  класса  $C^3$  односвязной области  $\mathbf{D}$  галилеевой плоскости  $Oxz$  в пространство-время Галилея  ${}^a\Gamma_1^3$  называется поверхностью в  ${}^a\Gamma_1^3$ . Пусть  $H(t, u)$  – точка области  $\mathbf{D}$ , область  $\mathbf{D}$  считаем прямоугольной,  $a < t < b$ ,  $c < u < d$ , параметр  $t$  является временным; возможно, что  $\mathbf{D}$  совпадает с плоскостью  $\Gamma^2 = Oxz$ .

В отображении  $\delta$  точке  $H(t, u)$  области  $\mathbf{D}$  соответствует точка  $M(x, y, z)$  пространства  ${}^a\Gamma_1^3$ , поверхность описывается галилеевой векторной функцией

$$\delta = \delta(t, u) = (x(t, u), y(t, u), z(t, u)), (t, u) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2,$$

функции  $x(t, u), y(t, u), z(t, u)$  являются функциями класса  $C^3$ .

**Теорема 6.** Если  $x(t, u) \neq \text{const}$ , то поверхность  $\delta$  описывается галилеевой векторной функцией вида

$$\delta = \delta(t, u) = (t, x(t, u), y(t, u)), (t, u) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2, \quad (5)$$

векторы производных функции (5) таковы:

$$\delta_t = \left( 1, x_t(t, u) + \frac{1}{2} + t, y_t(t, u) \right), \quad (6)$$

$$\delta_u = (0, x_u(t, u), y_u(t, u)); \quad (7)$$

они неколлинеарны: вектор  $\delta_t$  – единичный галилеев, вектор  $\delta_u$  евклидов.

# Так как  $x(t, u)$  – функция класса  $C^3$ , то она обратима по каждому из параметров. Имеем обратную функцию  $t = t(x, u)$ , и векторная функция  $(x(t, u), y(t, u), z(t, u))$  может быть представлена в другой параметризации:

$$\delta(t, u) = (t, y(t, x), z(t, x)), (t, x) \in \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{R}^2.$$

Изменим обозначения в этой параметризации и функцию  $\delta(t, u)$  запишем в виде (5). Частные производные функции (5) отыскиваются согласно теореме 2, п. 1.1. По определению нормы (3) галилеева вектора имеем  $|\delta_t| = 1$ . #

Параметризация (5) поверхности  $\delta$  пространства-времени Галилея  ${}^a\Gamma_1^3$  называется естественной. Поверхность (5) является регулярной класса  $C^3$  (функции  $x(t, u)$ ,  $y(t, u)$  имеют класс  $C^3$ , частные производные  $\delta_t$ ,  $\delta_u$  неколлинеарны), всякая точка поверхности – обыкновенная. Поверхность (5) обладает галилеевыми касательными векторами  $\delta_t$ . Поверхности вида

$$\delta(t, u) = (C, x(t, u), y(t, u))$$

совпадают с евклидовой плоскостью  $x = C$  пространства-времени Галилея  ${}^a\Gamma_1^3$  или являются ее частью и не рассматриваются.

Через всякую точку  $P(t_0, u_0)$  поверхности (5) проходит единственная  $t$ -линия

$$\delta(t, u_0) = (t, x(t, u_0), y(t, u_0)),$$

и единственная  $u$ -линия

$$\delta(t_0, u) = (t_0, y(t_0, u), z(t_0, u)),$$

последняя лежит в евклидовой плоскости пространства  ${}^a\Gamma_1^3$ , проходящей через точку  $P$ ;  $t$ -линии поверхности (5) имеют галилеевы касательные векторы (6),  $u$ -линии имеют евклидовы касательные векторы (7). В точке  $H(t_0, u_0)$  области  $\mathbf{D}$  определения поверхности (5) можно задать направление  $q = \frac{du}{dt}$  линией  $u = u(t)$ , проходящей через точку  $H$ , удовлетворяющую условию  $q = \frac{du}{dt} \Big|_{t=t_0}$ . В выбранном направлении  $q$  на поверхности (5) имеется линия

$$\delta(t, u(t)) = (t, x(t, u(t)), y(t, u(t))). \quad (8)$$

**Теорема 7.** Во всякой точке  $P(t_0, u_0) = (t_0, x(t_0, u_0), y(t_0, u_0))$  поверхности  $\delta(t, u)$  (5) в естественной параметризации существует галилеева касательная плоскость  $\langle P, \delta_t, \delta_u \rangle$ , уравнения которой:

$$x = t + t_0, \quad y = \left( x_t + \frac{1}{2} \right) t + \frac{(t-1)t}{2} x_u u + x(t_0, u_0), \quad z = y_t t + y_u u + y(t_0, u_0).$$

# Находим производную  $\dot{\delta} = \frac{d}{dt} \delta(t, u(t))$  функции (8):

$$\dot{\delta} = \left( 1, x_t + \frac{1}{2} + t + x_u \frac{du}{dt}, y_t + y_u \frac{du}{dt} \right),$$

см. теорему 2 и утверждение (в) свойства 2. Сумма векторов

$$\delta_t = \left( 1, x_t + \frac{1}{2} + t \right) \text{ и } \frac{du}{dt} \delta_u = \left( 0, x_u \frac{du}{dt}, y_u \frac{du}{dt} \right),$$

на основании (1) равна

$$\delta_t + \frac{du}{dt} \delta_u = \dot{\delta},$$

т.е. вектор касательной  $\dot{\delta}$  к линии  $\delta(t, u(t))$  на поверхности  $\delta(t, u)$  является линейной комбинацией векторов касательных к  $t$ -линии и  $u$ -линии поверхности в каждой точке поверхности. По теореме 5 записываются уравнения плоскости  $\langle P, \delta_t, \delta_u \rangle$ . #

## 2.2 Кривизна кривой

В пространстве-времени  ${}^a \Gamma_1^3$  по аналогии с пространством  $\Gamma^3$  [1] рассматриваем кривую в естественной параметризации

$$\delta(t) = (t, x(t), y(t)), \quad t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}. \quad (9)$$

По свойству 2 производные функции  $\delta(t)$  таковы:

$$\dot{\delta} = \left( 1, \dot{x} + \frac{1}{2} - t, \dot{y} \right), \quad \ddot{\delta} = (0, \ddot{x} - 1, \ddot{y}).$$

Вектор  $\dot{\delta}$  галилеев, вектор  $\ddot{\delta}$  евклидов, они взаимно перпендикулярны и вектор  $\ddot{\delta}$  является вектором главной нормали кривой (9). Единичный вектор  $\bar{n}$  главной нормали определяется равенством

$$\ddot{\delta} = |\ddot{\delta}| \bar{n}. \quad (10)$$

Величина  $|\ddot{\delta}|$  называется кривизной кривой (9) и обозначается  $k$ .

## 2.3 Нормальная кривизна поверхности

Со всякой точкой  $P(t_0, u_0)$  поверхности (5)

$$\delta = \delta(t, u) = (t, x(t, u), y(t, u)), \quad (t, u) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2,$$

связан репер  $\mathbf{B}_P = (P, \delta_t, \delta_u, \bar{n})$ , векторы касательных  $\delta_t$  (6) и  $\delta_u$  (7) вычислены в точке  $P$ , вектор  $\bar{n}$  есть единичный вектор евклидовой плоскости  $\langle P, \beta, \gamma \rangle$ , перпендикулярный евклидову вектору  $\delta_u$ . Его координаты определяются в результате дифференцирования евклидова вектора  $\frac{\delta_u}{|\delta_u|}$  по параметру  $u$  [1, с. 59–60]:

$$\bar{n} = \left( 0, -\frac{y_u}{|\delta_u|}, \frac{x_u}{|\delta_u|} \right). \quad (11)$$

Как евклидов вектор,  $\bar{n}$  перпендикулярен галилееву вектору касательной  $\delta_t$  поверхности. Таким образом,  $\mathbf{B}_P$  является ортогональным репером,

связанным с точкой  $P$  поверхности (5) в естественной параметризации. С изменением параметров точка  $P$  движется по поверхности,  $\mathbf{V}_P$  – подвижный репер поверхности (5).

**Теорема 8.** *Первая квадратичная форма поверхности (5) в естественной параметризации пространства-времени Галилея  ${}^a\Gamma_1^3$  задается равенствами*

$$ds^2 = \begin{cases} dt^2, & \text{если } t \text{ изменяется;} \\ x_u^2 + y_u^2, & \text{если } t = \text{const.} \end{cases} \quad (12)$$

# Малая дуга произвольной линии (8) на поверхности (5) есть  $d\delta$ . Во всех направлениях на поверхности, кроме направления  $u$ -линии, длина этой дуги равна  $dt$ , в направлении  $u$ -линии длина дуги равна  $d\delta = \sqrt{\delta u^2} = \sqrt{x_u^2 + y_u^2} du$ . Согласно галилеевой норме (3) в  ${}^a\Gamma_1^3$  на поверхности (5) определяется метрика равенствами (12). #

Обозначим:

$$E = E(t, u) = \delta_u^2 = x_u^2 + y_u^2, \quad (13)$$

это единственный ненулевой и неединичный коэффициент первой квадратичной формы поверхности. Первая квадратичная форма поверхности (5) записывается в виде

$$ds^2 = \begin{cases} dt^2, & \text{если } t \text{ изменяется;} \\ x_u^2 + y_u^2, & \text{если } t \text{ не изменяется.} \end{cases}$$

Функция (13) называется метрической функцией поверхности (5). На основе (13) единичный вектор нормали (11) поверхности (5) записывается в виде

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{E}}(0, -y_u, x_u). \quad (14)$$

Нормальной кривизной линии (8) на поверхности (5) называется

$$k_n = \ddot{\delta} \vec{n},$$

где  $\ddot{\delta}$  – производная второго порядка функции (8) по временному параметру  $t$ ,  $\vec{n}$  – нормаль поверхности (5), для сравнения см. (10). Величина  $k_n$  также называется нормальной кривизной поверхности (5) пространства-времени Галилея  ${}^a\Gamma_1^3$ .

**Теорема 9.** *Нормальная кривизна поверхности (5) есть функция направления  $q = \frac{du}{dt}$  на поверхности (5):*

$$k_n = Aq^2 + 2Bq + C, \quad (15)$$

коэффициенты этой функции равны

$$A = \delta_{uu} \vec{n}, \quad B = \delta_{t\vec{n}}, \quad C = \delta_{tt} \vec{n} \quad (16)$$

и вычисляются по формулам

$$A = \frac{1}{\sqrt{E}}(-x_{uu}y_u + y_{uu}x_u),$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{E}}(-x_{ut}y_u + y_{ut}x_u), C = \frac{1}{\sqrt{E}}(-x_{tt}y_u + y_{tt}x_u - y_u); \quad (17)$$

причем  $A=0$  только в случае, если  $u$ -линии поверхности (5) являются прямыми, если  $u$  является естественным параметром  $u$ -линии, то  $A$  есть кривизна  $u$ -линии;  $C$  есть кривизна  $t$ -линии поверхности (5), см. (10).

# Используя теорему 2 и свойство 1, находим полные производные функции (8):

$$\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dt} = \left( 1, \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{1}{2} - t + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt}, \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} \right),$$

$$\ddot{\delta} = \frac{d^2\delta}{dt^2} = \left( 0, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 1 + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial t} \frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \left( \frac{du}{dt} \right)^2, \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial t} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \right).$$

Вектор  $\ddot{\delta}$  евклидов, поэтому имеем разложение

$$\ddot{\delta} = \delta_{tt} + 2\delta_{tu} \frac{du}{dt} + \delta_u \frac{d^2u}{dt^2} + \delta_{uu} \left( \frac{du}{dt} \right)^2,$$

где вектор  $\delta_u$  есть (7) и

$$\delta_{tt} = \left( 0, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 1, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right), \delta_{tu} = \left( 0, \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial u}, \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial u} \right), \delta_{uu} = \left( 0, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right).$$

Для получения нормальной кривизны поверхности находим евклидово скалярное произведение евклидовых векторов  $\ddot{\delta}$  и  $\bar{n}$ , учитывая  $\delta_u \bar{n} = 0$ :

$$k_n = \ddot{\delta} \bar{n} = \delta_{uu} \bar{n} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \delta_{tu} \bar{n} \frac{du}{dt} + \delta_{tt} \bar{n}.$$

Вводим обозначения (16) и получаем нормальную кривизну поверхности (5) в виде (15). На основе (14) приходим к формулам (17). #

**Теорема 10.** Вторая квадратичная форма поверхности (5) такова:

$$\Pi = Adu^2 + 2Bdu dt + Cdt^2, \quad (18)$$

ее коэффициенты определяются равенствами (16) и имеют значения (15).

# При изменяющемся временном параметре  $t$  нормальную кривизну (15) поверхности (5) записываем в виде

$$\frac{Adu^2 + 2Bdudt + Cdt^2}{dt^2},$$

а если  $t$  не изменяется, т.е. в направлении  $u$ -линии поверхности (5), то нормальная кривизна  $k_n$  поверхности (5) не существует. #

Числитель полученной дроби называется второй квадратичной формой поверхности (5), которая записана в (18).

Нормальная кривизна поверхности (5) пространства-времени Галилея  ${}^a\Gamma_1^3$  и ее первая и вторая квадратичные формы точно такие же, как для поверхностей во всех известных галилеевых пространствах [1]. Поэтому свойства поверхности (5), зависящие от нормальной кривизны  $k_n$  и квадратичных форм, такие же, как во всех галилеевых пространствах. Квадратный трехчлен (15) нормальной кривизны поверхности может иметь от 0 до 2 корней или все его коэффициенты равны нулю:  $A = B = C = 0$ . Следовательно, поверхность может иметь соответственно от 0 до 2 асимптотических направлений или всякое направление на поверхности является асимптотическим. В связи с этим обыкновенная точка поверхности может быть эллиптической, параболической, гиперболической или точкой уплощения.

### 3 Полная и средняя кривизны поверхности

#### 3.1 Определение полной и средней кривизн

На поверхности выделяются два направления – направление  $u$ -линии, которому не соответствует никакое значение величины  $q$ , и экстремальное направление  $k_3$  нормальной кривизны.

**Лемма 5.** Производные единичного вектора нормали поверхности (5) коллинеарны вектору  $\delta_u$  касательной к  $u$ -линии поверхности:

$$\bar{n}_t = -\frac{B}{E}\delta_u, \quad \bar{n}_u = -\frac{A}{E}\delta_u. \quad (19)$$

# Продифференцируем скалярное произведение евклидовых векторов  $\delta_u \bar{n} = 0$ :

$$\delta_{uu}\bar{n} + \delta_u\bar{n}_t = 0, \quad \delta_{uu}\bar{n} + \delta_u\bar{n}_u = 0.$$

Первые слагаемые правых частей полученных равенств являются коэффициентами (16) второй квадратичной формы (18) поверхности (5):  $B + \delta_u\bar{n}_t = 0$ ,  $A + \delta_u\bar{n}_u = 0$ ; откуда

$$\delta_u\bar{n}_t = -B, \quad \delta_u\bar{n}_u = -A.$$

Запишем разложения векторов  $\bar{n}_t, \bar{n}_u$  по векторам ортогонального подвижного репера  $\mathbf{B}_P$ , п. 2.3, поверхности (5):

$$\bar{n}_t = B_1^1\delta_t + B_1^2\delta_u + C_1\bar{n}, \quad \bar{n}_u = B_2^1\delta_t + B_2^2\delta_u + C_2\bar{n}.$$

Так как все рассматриваемые векторы, кроме  $\delta_t$ , евклидовы, вектор  $\delta_t$  галилеев, то  $B_1^1 = B_2^1 = 0$ , таким образом, имеем

$$\vec{n}_t = B_1^2 \delta_u + C_1 \vec{n}, \quad \vec{n}_u = B_2^2 \delta_u + C_2 \vec{n}.$$

Векторы  $\vec{n}_t, \vec{n}_u$ , как производные единичного евклидова вектора  $\vec{n}$ , перпендикулярны вектору  $\vec{n}$ , вектор  $\vec{n}$  перпендикулярен вектору  $\delta_u$ . Умножим последние равенства скалярно на вектор  $\delta_u$ :

$$\delta_u \vec{n}_t = B_1^2 \delta_u^2, \quad \delta_u \vec{n}_u = B_2^2 \delta_u^2,$$

здесь  $\delta_u \vec{n} = 0$ ,  $\delta_u^2 = E$ , см. (13). Теперь получаем (19). #

Установленная лемма соответствует теореме Родрига евклидовой геометрии [5, с. 97], согласно которой векторы  $\vec{n}_t, \vec{n}_u$  коллинеарны главным направлениям на поверхности. Поэтому можно считать, что направление  $u$ -линии поверхности является ее главным направлением. На направлении  $u$ -линии параметр  $t$  не изменяется, поэтому в направлении  $u$ -линии  $k_n = A$ . В качестве второго главного направления на поверхности возьмем направление экстремальной кривизны.

**Лемма 6.** *Экстремальное направление на поверхности есть*

$$q_3 = \frac{-B}{A},$$

*экстремальное значение нормальной кривизны поверхности (5) равно*

$$k_3 = \frac{AC - B^2}{A}. \quad (20)$$

# Функцию нормальной кривизны  $k_n = f(q)$  (15) поверхности про дифференцируем по  $q$  и экстремальное направление на поверхности найдем из условия

$$f'(q) = 0.$$

Имеем  $f'(q) = 2Aq + 2B = 0$ , откуда находим  $q_3 = \frac{-B}{A}$ . В этом направлении экстремальная нормальная кривизна поверхности есть (20). #

Произведение значений нормальных кривизн в указанных направлениях называется полной кривизной поверхности, а их сумма называется средней кривизной поверхности.

**Теорема 11.** *Полная и средняя кривизны поверхности пространства-времени Галилея  ${}^a \Gamma_1^3$  вычисляются по формулам*

$$K = AC - B^2, \quad H = \frac{A^a + AC - B^2}{A}. \quad (21)$$

# Согласно определению  $K = Ak_3$ ,  $H = A + k_3$  подставляем  $k_3$  из (20). #

### 3.2 Примеры

Вычислим полную кривизну некоторых поверхностей пространства-времени Галилея  ${}^a \Gamma_1^3$  с нелинейной геометрией.

1. Естественная параметризация плоскости, согласно теореме 3, такова:

$$\delta(t, u) = \left( t, pt + \frac{t^2}{2} - t + 2u + g, at + su + h \right).$$

Производные функции  $\delta(t, u)$  равны

$$\delta_t = \left( 1, p + t - 1 + \frac{1}{2} - t, q \right) = \left( 1, p - \frac{1}{2}, 0 \right), \quad \delta_u = (0, r, s),$$

$$\delta_{tt} = (0, 0, 0), \quad \delta_{tu} = (0, 0, 0), \quad \delta_{uu} = (0, 0, 0).$$

По (16) и (21)  $k_n = 0$  и  $K = 0$ .

2. Параболические цилиндры описываются векторными функциями:

$$\delta(t, u) = \left( t, u, \frac{a}{2}t^2 \right); \quad \delta(t, u) = \left( t, \frac{a}{2}t^2, u \right); \quad a \neq 0.$$

В первом случае имеем производные:

$$\delta_t = \left( 1, \frac{1}{2} - t, at \right), \quad \delta_u = (0, 1, 0), \quad \vec{n} = (0, 0, 1),$$

$$\delta_{tt} = (0, -1, a), \quad \delta_{tu} = (0, 0, 0), \quad \delta_{uu} = (0, 0, 0).$$

По (13)  $E = 1$ , по (19)  $A = 0, B = 0, C = a$ ; и по (15)  $k_n = a$ , по (21)  $K = 0$ .

Во втором случае:

$$\delta_t = \left( 1, at + \frac{1}{2} - t, 0 \right), \quad \delta_u = (0, 0, 1), \quad \vec{n} = (0, 1, 0),$$

$$\delta_{tt} = (0, a - 1, 0), \quad \delta_{tu} = (0, 0, 0), \quad \delta_{uu} = (0, 0, 0).$$

По (13)  $E = 1$ , по (19)  $A = 0, B = 0, C = a - 1$ ; по (15)  $k_n = a - 1$ , но при  $a = 1$   $k_n = 0$ ; по (21)  $K = 0$ .

3. Параболоиды могут быть заданы функцией

$$\delta(t, u) = \left( t, u, \frac{a}{2}t^2 + \frac{b}{2}u^2 \right).$$

При  $ab > 0$  функция задает эллиптический параболоид, при  $ab < 0$  – гиперболический параболоид. Имеем:

$$\delta_t = \left( 1, \frac{1}{2} - t, at \right), \quad \delta_u = (0, 1, bu), \quad E = 1 + b^2u^2, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2u^2}}(0, -bu, 1),$$

$$\delta_{tt} = (0, -1, a), \quad \delta_{tu} = (0, 0, 0), \quad \delta_{uu} = (0, 0, b).$$

$$\text{По (19) } A = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2u^2}}, B = 0, C = \frac{a + bu}{\sqrt{1 + b^2u^2}}; \quad \text{по (21) } K = \frac{ab + b^2u}{\sqrt{1 + b^2u^2}}.$$

4. Параболоид вращения

$$\delta(t, u) = (t, t^2 \cos u, t^2 \sin u).$$

Производные:

$$\delta_t = \left( 1, 2t \cos u + \frac{1}{2} - t, 2t \sin u \right), \quad \delta_u = (0, -t^2 \sin u, t^2 \cos u), \quad E = t^4,$$

$$\vec{n} = (0, -\cos u, -\sin u), \quad \delta_{tt} = (0, 2 \cos u - 1, 2 \sin u),$$

$$\delta_{uu} = (0, -2t \sin u, 2t \cos u), \quad \delta_{uu} = (0, -t^2 \cos u, -t^2 \sin u).$$

$$A = t^2, \quad B = 0, \quad C = \frac{-2 + \cos u}{t^2}; \quad \text{по (21)} \quad K = -2 + \cos u.$$

5. Полусфера

$$\delta(t, u) = \left( t, \frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{R} \cos u, \frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{R} \sin u \right);$$

$$\delta_t = \left( 1, \frac{-t}{R\sqrt{R^2 - t^2}} \cos u + \frac{1}{2} - t, \frac{-t}{R\sqrt{R^2 - t^2}} \sin u \right),$$

$$\delta_u = \left( 0, -\frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{R} \sin u, \frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{R} \cos u \right), \quad E = \frac{R^2 - t^2}{R^2}, \quad \vec{n} = (0, -\cos u, -\sin u),$$

$$\delta_{tt} = \left( 0, \frac{R^2 - 2t^2}{R(\sqrt{R^2 - t^2})^3} \cos u - 1, \frac{R^2 - 2t^2}{R(\sqrt{R^2 - t^2})^3} \sin u \right),$$

$$\delta_{tu} = \left( 0, \frac{t}{R\sqrt{R^2 - t^2}} \sin u, \frac{-t}{R\sqrt{R^2 - t^2}} \cos u \right),$$

$$\delta_{uu} = \left( 0, -\frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{R} \cos u, -\frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{R} \sin u \right).$$

$$\text{По (19)} \quad A = 1, \quad B = 0, \quad C = \frac{R^2 - 2t^2}{R(\sqrt{R^2 - t^2})^3} + \cos u; \quad \text{по (21)}$$

$$K = \frac{R^2 - 2t^2}{R(\sqrt{R^2 - t^2})^3} + \cos u.$$

6. Геликоид есть поверхность

$$\delta(t, u) = (t, u \cos mt, u \sin mt).$$

$$\delta_t = \left( 1, mu \sin mt + \frac{1}{2} - t, mu \cos mt \right), \quad \delta_u = (0, \cos mt, \sin mt), \quad E = 1,$$

$$\vec{n} = (0, -\sin mt, \cos mt), \quad \delta_{tt} = (0, -m^2 u \cos mt - 1, -m^2 u \sin mt),$$

$$\delta_{tu} = (0, -m \sin mt, m \cos mt), \quad \delta_{uu} = (0, 0, 0).$$

$$A = 0, B = m, C = \sin mt; K = -m^2.$$

Полная кривизна галилеевой плоскости постоянна и равна нулю. Всякая точка плоскости является точкой уплощения. Параболические цилиндры имеют постоянную нулевую кривизну; при  $a \neq 1$  на поверхностях в каждой точке существует единственное асимптотическое направление – евклидово, направление  $t$ -линии не асимптотическое. При  $a = 1$  направление  $t$ -линии асимптотическое и всякая точка параболического цилиндра есть точка уплощения, т.к.  $t$ -линия в этом случае является прямой линией, ее кривизна равна нулю, см. п. 2.2. Параболоиды имеют изменяющуюся ненулевую кривизну, хотя некоторые *параболы* обладают нулевой кривизной, как отмечено в предыдущем предложении. Полная кривизна сферы непостоянна в пространстве-времени Галилея, а в евклидовой геометрии постоянна. Геликоиды имеют постоянную отрицательную полную кривизну, ее величина может быть любой заданной.

#### Список литературы

1. **Долгарев, А. И.** Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств / А. И. Долгарев. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2005. – 306 с.
2. **Арнольд, В. И.** Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1989. – 472 с.
3. **Долгарев, И. А.** Альтернативное 2-мерное действительное линейное пространство. Группа Ли базисов пространства / И. А. Долгарев, А. И. Долгарев // Владикавказский математический журнал. – 2007. – Т. 9. – Вып. 4. – С. 4–14.
4. **Долгарев, И. А.** Альтернативная аффинная плоскость / И. А. Долгарев, А. И. Долгарев // Владикавказский математический журнал. – 2008. – Т. 10. – Вып. 2. – С. 9–20.
5. **Позняк, Э. Г.** Дифференциальная геометрия / Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин. – М. : Изд-во МГУ, 1990. – 384 с.

**Долгарев Иван Артурович**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования  
Пензенский государственный  
университет

**Dolgarev Ivan Arturovich**  
PhD in Mathematics, associate professor,  
sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling,  
Penza State University

E-mail: delivar@yandex.ru

УДК 514.7

**Долгарев, И. А.**

**Поверхности в коммутативной нелинейной геометрии 3-мерного пространства-времени Галилея / И. А. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 69–86.**

М. Ю. Медведик, И. А. Родионова, Ю. Г. Смирнов

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ В СЛОЯХ, СВЯЗАННЫХ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЕ\*

*Аннотация.* Статья посвящена разрешимости краевой задачи дифракции для системы уравнений Максвелла в слоях, связанных через отверстие. Слои сформированы тремя идеально проводящими и бесконечно тонкими параллельными плоскостями. Электромагнитные параметры в разных областях могут быть различны. Используются условия Свешникова-Вернера на бесконечности. Применяется метод функций Грина для сведения краевой задачи к псевдодифференциальному уравнению на отверстии, которое рассматривается в пространствах Соболева. Устанавливается фредгольмовость уравнения. Данная задача принадлежит классу задач о связи объемов через отверстие.

*Ключевые слова:* краевая задача, электромагнитная задача дифракции, интегральное уравнение, численный метод.

*Abstract.* The paper is devoted to the solvability of boundary value problem of diffraction for Maxwell equations in layers connected through a hole. The layers are formed by three infinitely thin and perfectly conducting parallel planes. Electromagnetic parameters can be different in the layers. Radiation conditions by Werner-Sveshnikov are used at the infinity. Method of Green functions is applied for reduction of boundary value problem to the pseudodifferential equation on a hole in Sobolev spaces. Fredholm property is established. The problem belongs to the class of problems of connection of volumes via a hole.

*Keywords:* boundary value problem, electromagnetic scattering, integral equations, numerical method.

### 1 Постановка задачи

Векторные задачи дифракции о связи через отверстие полупространства с полупространством, полупространства со слоем и полупространства с прямоугольным полубесконечным волноводом были рассмотрены в работе [1].

Рассмотрим задачу дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля  $E^0, H^0$  в экранированных слоях, связанных через отверстие.

Пусть  $U^+ = \{x = (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_3 < 1\}$  и  $U^- = \{x : -1 < x_3 < 0\}$  – слои, сформированные тремя идеально проводящими и бесконечно тонкими параллельными плоскостями, отверстие  $\Omega \subset R^2 = \{x_3 = 0\} \subset R^3$  – ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma = \partial\Omega$ , состоящей из конечного числа простых дуг класса  $C^\infty$ , сходящихся под углами, отличными от нулевого. Предполагается, что падающее поле  $E^0, H^0$  является решением системы уравнений Максвелла в слое  $U^+$  без отверстия с краевым условием

\* Работа выполнена в рамках ФЦП Минобрнауки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» (регистрационный № 2.1.1/1647) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-07-89063а).

$$E_{\tau}^0 \Big|_{x_3=0, x_3=1} = 0 \quad (1)$$

и создается источниками, расположенными вне  $\bar{\Omega}$ , поэтому

$$H_{\tau}^0 \Big|_{\Omega} \in C^{\infty}(\bar{\Omega}). \quad (2)$$

Поле  $E^0, H^0$  в слое  $U^-$  тождественно равно нулю.

Будем считать, что среды в  $U^+$  и  $U^-$  имеют постоянные электромагнитные параметры  $\epsilon_1, \mu_1$  и  $\epsilon_2, \mu_2$  соответственно, относительно которых предполагаем, что  $\text{Im} \epsilon_j \geq 0, \text{Re} \epsilon_j > 0, \text{Im} \mu_j \geq 0, \text{Re} \mu_j > 0, k_j^2 = \epsilon_j \mu_j \omega^2, \text{Im} k_j \geq 0, (k_j \neq 0)$ , где  $\omega > 0$  – круговая частота.

Рассмотрим случай  $E$ -поляризации в задаче дифракции падающего поля  $E^0, H^0$  на отверстии  $\Omega$ , соединяющем два параллельных слоя  $U^+$  и  $U^-$ . Эта задача состоит в определении рассеянного  $E$ -поляризованного электромагнитного поля  $E, H, E := (0, 0, E^3)$  и  $H := (H^1, H^2, 0)$ , удовлетворяющего условиям:

$$E, H \in C^2(U) \bigcap_{\delta > 0} C(\overline{U^+ \setminus \Gamma_{\delta}}) \bigcap_{\delta > 0} C(\overline{U^- \setminus \Gamma_{\delta}}), \quad (3)$$

где  $U = U^+ \bigcup U^-$ ,  $\Gamma_{\delta} := \{x : |x - y| < \delta, y \in \Gamma = \partial\Omega\}$ ;

– однородным уравнениям Максвелла

$$\text{rot } H = -i\omega \epsilon E,$$

$$\text{rot } E = i\omega \mu H, x \in U, \quad (4)$$

– краевым условиям

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_3} \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (5)$$

где  $\Sigma = \Sigma_0 \bigcup \Sigma_+ \bigcup \Sigma_-$ ,  $\Sigma_0 = \{x : x_3 = 0, x \in R^2 \setminus \bar{\Omega}\}$ ,  $\Sigma_{\pm} = \{x : x_3 = \pm 1\}$  (выполняются только на гладких частях поверхности  $\Sigma$ ),

– условиям сопряжения на границе раздела сред

$$[E_{\tau}]_{\Omega} = 0, \quad (6)$$

$$[H_{\tau}]_{\Omega} = -[H_{\tau}^0]_{\Omega}, \quad (7)$$

где  $[f]_{\Omega} := \lim_{x_3 \rightarrow +0} f - \lim_{x_3 \rightarrow -0} f, x' = (x_1, x_2) \in \Omega$ ;

– условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме

$$E, H \in L_{loc}^2(U); \quad (8)$$

– условиям Свешникова-Вернера на бесконечности: при  $x \in U^-$  (при  $x \in U^+$  аналогично):

- если  $\text{Im} \varepsilon_2 > 0$  или  $\text{Im} \mu_2 > 0$ , то

$$E, H = O(\rho^{-1/2}), \rho := |x'| \rightarrow \infty, \quad (9)$$

равномерно по всем направлениям  $x'/\rho$  и по  $x_3$ ;

• если  $\text{Im} \varepsilon_2 = 0, \text{Im} \mu_2 = 0, \varepsilon_2 > 0$  и  $\mu_2 > 0$ , то потребуем, чтобы коэффициенты Фурье

$$u_n(x') = 2 \int_{-1}^0 u(x) \cos \pi n x_3 dx_3; \quad (10)$$

для компонент  $u = H^1, H^2$  или  $E^3$  удовлетворяли условиям:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_n - i k_n u_n = o(\rho^{-1/2}), u_n = O(\rho^{-1/2}), \rho \rightarrow \infty, \quad (11)$$

- при  $k_n^2 := k^2 - \pi^2 n^2 > 0$  ( $k_n > 0$ , если  $k > \pi n$  и  $k_n < 0$ , если  $k < -\pi n$ ),

$$u_n = O(1), \rho \rightarrow \infty, \quad (12)$$

- при  $k_n = 0$ , и

$$u_n = o(\rho^{-1/2}), \partial u_n / \partial \rho = o(\rho^{-1/2}), \rho \rightarrow \infty, \quad (13)$$

- при  $\text{Im} k_n > 0$ , равномерно по всем направлениям  $x'/\rho$  и по  $n$ .

Соотношение (11) определяет условия Зоммерфельда для двумерной ограниченной области, а (12) является условием на бесконечности для двумерного уравнения Лапласа. Эти условия накладываются лишь на конечное число коэффициентов Фурье; следовательно, равномерность по  $n$  для них не требуется. Требование равномерности оценок (13) по  $n$  существенно и будет использовано ниже.

Из уравнений Максвелла (4) следует, что для  $u = E^3$  получаем краевую задачу:

$$\Delta u + k_j^2 u = 0, x \in U^+ (j=1), x \in U^- (j=2); \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{\Sigma_0} = \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 1} = 0; \quad (15)$$

$$[\varepsilon u]_{\Omega} = -[\varepsilon E_0^3]_{\Omega}, \left[ \frac{\partial u}{\partial x_3} \right]_{\Omega} = 0; \quad (16)$$

$$u \in C^2(U) \bigcap_{\delta>0} C(\overline{U^+} \setminus \Gamma_{\delta}) \bigcap_{\delta>0} C(\overline{U^-} \setminus \Gamma_{\delta}), \quad (17)$$

$$u \in L_{loc}^2(U) \quad (18)$$

со сформулированными выше условиями на бесконечности (9)–(13).

## 2 Функция Грина для слоя

Рассмотрим функцию Грина  $G^U$  для уравнения Гельмгольца для слоя  $U := U^-$ . Относительно волнового числа  $k$  считаем, что  $\text{Im } k \geq 0$  и  $k \neq 0$ .

Функция Грина  $G^U$  может быть представлена в форме [2]:

$$G^U(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\exp(ik|x-y-2je_3|)}{|x-y-2je_3|} + \frac{\exp(ik|x-y^*+2je_3|)}{|x-y^*+2je_3|} \right), \quad (19)$$

где  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Представление имеет смысл при  $\text{Im } k \geq 0$  и  $k \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

В дальнейшем потребуются свойства следа функции  $G^U$  при  $x_3 = 0$  и  $y_3 = 0$ . Выделим особенность при  $|x' - y'| \rightarrow 0$  функции  $G^U(x', y')$ :

$$\begin{aligned} G^U|_{x_3=y_3=0} &= G^U(x', y') = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(ik\left(|x'-y'|^2 + 4j^2\right)^{1/2}\right)}{\left(|x'-y'|^2 + 4j^2\right)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik|x'-y'|}}{|x'-y'|} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{2ikj}}{2j} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\exp\left(ik\left(|x'-y'|^2 + 4j^2\right)^{1/2}\right)}{\left(|x'-y'|^2 + 4j^2\right)^{1/2}} - \frac{e^{2ikj}}{2j} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik|x'-y'|}}{|x'-y'|} - \frac{1}{2\pi} \ln\left(1 - e^{2ik}\right) + B(x', y') = L(x' - y') - P(k) + B(x', y'), \quad (20) \end{aligned}$$

где

$$P(k) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(1 - e^{2ik}\right). \quad (21)$$

Здесь  $\ln z$  обозначает аналитическое продолжение вещественной функции  $\ln t, t > 0$  на множество  $C \setminus (-i\infty, 0]$  и

$$B(x', y') := \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\exp\left(ik\left(|x'-y'|^2 + 4j^2\right)^{1/2}\right)}{\left(|x'-y'|^2 + 4j^2\right)^{1/2}} - \frac{e^{2ikj}}{2j} \right).$$

Для коэффициентов  $b_j(x', y')$  ряда  $B(x', y')$  и их производных любого порядка  $\alpha$  по  $x_j$  и  $y_j$  верны оценки [2]

$$\left| D^\alpha b_j(x', y') \right| \leq C_\alpha j^{-2}, \quad x, y \in \bar{\Omega}, \quad (22)$$

равномерные на каждом компакте  $\bar{\Omega} \subset R^2$ . Следовательно, мы доказали, что  $B \in C^\infty(R^2 \times R^2)$ .

Из представления (19) получаем, что функция  $G^U = G^U(x, y; k)$  аналитична по  $k$  в  $C_+ = \{k : \text{Im } k > 0\}$ .

### 3 Псевдодифференциальное уравнение на отверстии

Обозначим через  $\Lambda(U)$  множество значений  $\omega$ , при которых функции Грина  $G_j^U$  не определены:  $\Lambda(U) = \Lambda_1(U) \cup \Lambda_2(U)$ ,  $\Lambda_j(U) := \{\omega : \varepsilon_j \mu_j \omega^2 = \pi^2 n^2, n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $j = 1, 2$ .

Тогда, как показано в [2],  $G_j^U(x, y; \omega)$  непрерывно дифференцируема по  $x_i$  и  $y_i$  любое число раз в  $\bar{U} \times \bar{U} \setminus \{(x, x) : x \in \partial U\}$  и непрерывна по  $\omega$  в  $R_+ \setminus \Lambda(U)$ ,  $R_+ = \{\omega : \omega > 0\}$ .

Определим потенциалы:

$$V_j(x) = \int_{S_R} G_j^U(x, y) \phi(y) ds_y, \quad (23)$$

где  $x \in U^+$  при  $j = 1$ ,  $x \in U^-$  при  $j = 2$ ,

$$S_R = \Omega \cap \partial T_R, \quad T_R = \{|x'| < R, -1 < x_3 < 1\}; \quad (24)$$

$$\phi(y) \in C(S_R). \quad (25)$$

Потенциалы  $V_j$  стремятся к нулю равномерно при  $R \rightarrow \infty$  по  $\omega \in \bar{C}_+ \setminus \Lambda(U)$  [2].

Используя это свойство потенциала, имеем

$$u(x) = \int_{\Omega} G_j^U(x, y') \frac{\partial u}{\partial x_3}(y') ds_{y'} + \int_{S_R} \left[ G_j^U(x, y) \frac{\partial u}{\partial x_3}(y) - \frac{\partial G_j^U}{\partial x_3}(x, y) u(y) \right] ds_y. \quad (26)$$

Второе слагаемое в (26) стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$  равномерно по  $\omega \in \bar{C}_+ \setminus \Lambda(U)$  и по  $x$  в каждой ограниченной подобласти  $U^\pm$ .

Используя условия сопряжения, сводим задачу (14)–(18) к интегральному уравнению:

$$A\psi \equiv A(\omega)\psi := \int_{\Omega} (\varepsilon_1 G_1^U(x', y') + \varepsilon_2 G_2^U(x', y')) \psi(y') ds = f(x'), \quad x' \in \Omega; \quad (27)$$

$$\Psi(y') = \frac{du}{dx_3}(y') \quad (y' \in \Omega); \quad (28)$$

$$x' := (x_1, x_2) \text{ и } y' := (y_1, y_2), \quad f(x') \in C^\infty(\bar{\Omega}); \quad (29)$$

$$G_j^U(x', y') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_j(|x'-y'|^2+4m^2)^{1/2}}}{(|x'-y'|^2+4m^2)^{1/2}}. \quad (30)$$

Мы рассматриваем (27) как псевдодифференциальное уравнение для оператора  $A(\omega)$  из  $\tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$  в  $H^{1/2}(\Omega)$  [3]. Уравнение (27) будет определять псевдодифференциальный оператор с главным символом  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{1}{|\xi|}$  [1]. Оператор  $A(\omega)$  будет эллиптическим [1, 4]. Используя (20) и (27), представим  $A(\omega)$  в следующем виде:

$$A(\omega) = \varepsilon_1 (L_1(\omega) - P_1(\omega) + B_1(\omega)) + \varepsilon_2 (L_2(\omega) - P_2(\omega) + B_2(\omega)), \quad (31)$$

где  $L_j(\omega) = L(k_j)$ ,  $P_j(\omega) = P(k_j)$ ,  $B_j(\omega) = B(k_j)$  – интегральные операторы.

Примем обозначения  $L(\omega) \equiv \varepsilon_1 L_1(\omega) + \varepsilon_2 L_2(\omega)$ ,  $P(\omega) \equiv \varepsilon_1 P_1(\omega) + \varepsilon_2 P_2(\omega)$ ,  $B(\omega) \equiv \varepsilon_1 B_1(\omega) + \varepsilon_2 B_2(\omega)$ . Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.**  $L(\omega): \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Omega)$  является фредгольмовым оператором.  $B(\omega): \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Omega)$  – компактный оператор для всех  $\omega \in R_+$ . Оператор  $A(\omega): \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Omega)$  – фредгольмов для всех  $\omega \in R_+$  таких, что  $\omega \notin \Lambda(U)$ .

Действительно, т.к. оператор  $B(x', y') \in C^\infty(R^2 \times R^2)$ , то  $B(\omega)$  компактен. Фредгольмовость и обратимость оператора  $L(\omega)$  доказана в [1]. Тогда в силу одномерности образа оператора  $P(\omega)$  следует, что оператор  $A(\omega)$  фредгольмов.

#### 4 Численный метод решения псевдодифференциального уравнения

Рассмотрим метод Галеркина для решения интегрального уравнения (27), имеющего слабую особенность.

Пусть  $\omega \notin \Lambda(U)$  ( $j=1, 2$ ), и уравнение  $A\psi = f$  имеет единственное решение, где  $A: \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Omega)$  – интегральный оператор,

$$A\psi = \int_{\Omega} (\varepsilon_1 G_1^U(x', y') + \varepsilon_2 G_2^U(x', y')) \psi(y') ds.$$

Для удобства дальнейшего изложения приведем основные утверждения о сходимости методов Галеркина для уравнений с эллиптическими операторами [4, 5].

Рассмотрим приближенное решение линейных операторных уравнений с помощью проектирования их на подпространства, которые будем считать имеющими конечную размерность. Ниже все операторы предполагаются линейными.

**Определение 1.** Пусть  $X$  и  $Y$  – гильбертовы пространства и  $A: X \rightarrow Y$  – ограниченный инъективный оператор. Пусть  $X_n \subset X$  и  $Y_n \subset Y$  – две последовательности подпространств с условиями  $\dim X_n = \dim Y_n = n$  и пусть  $P_n: Y \rightarrow Y_n$  – проекционные операторы. Рассмотрим проекционный метод, образованный посредством  $X_n$  и  $P_n$ , который аппроксимирует уравнение

$$A\varphi = f \quad (32)$$

с помощью приближенного уравнения

$$P_n A \varphi_n = P_n f. \quad (33)$$

Этот проекционный метод называется сходящимся для оператора  $A$ , если существует число  $N$  такое, что для каждого  $f \in \text{Im } A$  ( $\text{Im } A$  – образ оператора  $A$ ) приближенное уравнение (33) имеет единственное решение  $\varphi_n \in X_n$  для всех  $n \geq N$ , и если эти решения сходятся  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  при  $n \rightarrow \infty$  к единственному решению  $\varphi$  уравнения (32).

В общем случае можно ожидать сходимость метода только тогда, когда подпространства  $X_n$  предельно плотны в  $X$ :

$$\inf_{\psi \in X_n} \|\psi - \varphi\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (34)$$

для всех  $\varphi \in X$ . Свойство (34) называют также свойством аппроксимации (произвольный элемент из  $X$  может быть аппроксимирован элементами из подпространства  $X_n$  с любой точностью в норме  $\|\cdot\|$  пространства  $X$ ). В последующем анализе будем всегда предполагать, что это условие выполняется.

Если проекционный метод сходится, то верна оценка скорости сходимости [4, 5]

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq M \inf_{\psi \in X_n} \|\psi - \varphi\| \quad (35)$$

для некоторой константы  $M$ .

Оценка (35) называется квазиоптимальной. Она показывает, что ошибка в проекционном методе определяется тем, как хорошо точное решение может быть аппроксимировано с помощью элементов подпространств  $X_n$  в норме пространства  $X$ .

**Утверждение 1** [4, 5]. Предположим, что  $A: X \rightarrow Y$  есть ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный  $A^{-1}: Y \rightarrow X$ , и что проекционный метод (33) является сходящимся для  $A$ . Пусть оператор  $K: X \rightarrow Y$  ком-

пактен и  $A + K$  – инъективен. Тогда проекционный метод (33) сходится для оператора  $A + K$ .

Для операторных уравнений в гильбертовых пространствах проекционный метод, строящийся с помощью ортопроекторов на конечномерные подпространства, приводит к методу Галеркина. Пусть  $A: X \rightarrow Y$  инъективный линейный ограниченный оператор и пусть  $P_n: Y \rightarrow Y_n$  – последовательность ортопроекторов. Тогда  $\varphi_n \in X_n$  будет приближенным решением уравнения  $A\varphi = f$  с помощью проекционного метода, образованного посредством выбора пространств  $X_n$  и проекторов  $P_n$ , тогда и только тогда, когда

$$(A\varphi_n, g)_Y = (f, g)_Y, \quad \forall g \in Y_n, \quad (36)$$

где  $(\cdot, \cdot)_Y$  – скалярное произведение в  $Y$ . Уравнение (36) называют уравнением Галеркина.

Будем рассматривать случай, когда  $Y = X'$ , где  $X'$  – антидвойственное пространство к  $X$  (пространство антилинейных ограниченных функционалов над  $X$ ) относительно некоторой ограниченной полуторалинейной формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Замечание 1.** Все результаты этого параграфа остаются в силе, если взять  $Y = X$ , но для уравнения электрического поля необходимо рассмотреть случай  $Y = X'$ .

Рассмотрим метод Галеркина, образованный с помощью подпространств  $X_n \in X$ ,  $\varphi_n \in X_n$ :

$$\langle A\varphi_n, \psi \rangle = \langle f, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in X_n. \quad (37)$$

Если  $J: X \rightarrow X'$  – оператор, осуществляющий изоморфизм между  $X$  и  $X'$ , то (37) эквивалентно уравнениям  $(A\varphi_n, J\psi)_Y = (f, J\psi)_Y$  для любого  $\psi \in X_n$ , или уравнениям (36), где  $(\cdot, \cdot)_Y$  – скалярное произведение в  $Y = X'$ ,  $g = J\psi$ ,  $Y_n = JX_n$ . Таким образом, метод Галеркина (37) эквивалентен методу Галеркина (36).

**Определение 2.** Оператор  $A: X \rightarrow X'$  будем называть коэрцитивным, если существует константа  $C > 0$  такая, что выполняется условие

$$|\langle A\varphi, \varphi \rangle| \geq C \|\varphi\|^2 \quad (38)$$

для любого  $\varphi \in X$ .

**Замечание 2.** Если выполняется условие

$$\operatorname{Re} \langle A\varphi, \varphi \rangle \geq C \|\varphi\|^2 \quad (39)$$

для любого  $\varphi \in X$  или условие

$$\operatorname{Im} \langle A\varphi, \varphi \rangle \geq C \|\varphi\|^2 \quad (40)$$

для любого  $\varphi \in X$ , то справедливо и (38), поэтому оператор в этих случаях также будет коэрцитивным.

**Определение 3.** Оператор  $A: X \rightarrow X'$  будем называть эллиптическим, если существует компактный оператор  $K: X \rightarrow X'$  такой, что оператор  $A + K$  – коэрцитивный.

Иногда перечисленные выше неравенства записывают для оператора  $A + K$ , тогда они называются неравенствами Гординга.

**Утверждение 2** [4, 5]. Пусть  $A: X \rightarrow X'$  – коэрцитивный оператор, и подпространства  $X_n \subset X$  обладают свойством аппроксимации. Тогда метод Галеркина (37) сходится.

**Утверждение 3** [4, 5]. Пусть  $A: X \rightarrow X'$  – инъективный эллиптический оператор, и подпространства  $X_n \subset X$  обладают свойством аппроксимации. Тогда метод Галеркина (37) сходится.

Таким образом, для сходимости метода Галеркина для уравнения с инъективным эллиптическим оператором необходимо и достаточно выполнение условия аппроксимации и, если метод сходится, верна квазиоптимальная оценка скорости сходимости.

Рассмотрим  $N$ -мерные подпространства  $V_N \subset \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$ . Будем проводить аппроксимации точного решения уравнения  $\psi$  элементами  $\psi_N \in V_N$ . Методом Галеркина находим  $\psi_N$  из системы уравнений

$$(A\psi_N, v) = (f, v), \forall v \in V_N. \quad (41)$$

Эти уравнения определяют конечномерные операторы  $A_N: V_N \rightarrow V'_N$ , где  $V'_N$  есть антидвойственное пространство к  $V_N$ . Поскольку оператор  $A(\omega)$  является эллиптическим для рассматриваемых значений  $\omega$ , то метод Галеркина сходится, если базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации [1, 4, 5].

Пусть  $\Omega$  – прямоугольная область,  $\Omega = [(0, a) \times (0, b)]$ . Построим в области  $\Omega$  равномерную прямоугольную сетку:

$$\Pi_{x'} = \{x' | a_{i-1} < x_1 < a_i, b_{j-1} < x_2 < b_j\},$$

$$\Pi_{y'} = \{y' | a_{i-1} < y_1 < a_i, b_{j-1} < y_2 < b_j\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}$$

с шагом  $h_1 = \frac{a}{n}$  по оси  $x_1(y_1)$  и шагом  $h_2 = \frac{b}{m}$  по оси  $x_2(y_2)$ .

В качестве базисных выбираем функции вида

$$v_{ij}(x') = \begin{cases} 1, & \text{если } x' \in [(a_{i-1}, a_i) \times (b_{j-1}, b_j)], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (42)$$

Будем рассматривать семейство  $V_N$  из  $N = nm$  функций  $v_{ij}(x')$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Очевидно, что выбранные функции удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве  $\tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$ . Тогда имеем следующий результат.

**Теорема 2.** Метод Галеркина (41) для уравнения (27) с выбором базисных функций (42) сходится.

Каждый элемент матрицы, соответствующей конечномерному оператору, получается путем вычисления четырехкратного интеграла:

$$A_{pq} := \int_{\Omega} \left( \varepsilon_1 G_1^U(x', y') + \varepsilon_2 G_2^U(x', y') \right) \Psi_q(y') \cdot \nu_p(x') ds. \quad (43)$$

Разобьем каждый элемент сетки на  $k$  прямоугольников. Внутри каждого такого прямоугольника выберем среднюю точку – точку пересечения диагоналей. Интегрирование производим методом прямоугольников, суммируя значение функции во всех точках, умноженных на площадь прямоугольника. В связи с наличием особенности в функции Грина при интегрировании возможна ситуация, приводящая к делению на нуль. Чтобы избежать этого, будем использовать метод, предложенный Андерссоном. Для этого рассмотрим отдельно интеграл, содержащий слабую особенность:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} L(x' - y') ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{e^{ik_j|x'-y'|}}{|x' - y'|} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{e^{ik_j|x'-y'|}}{|x' - y'|} - \frac{1}{|x' - y'|} \right) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{|x' - y'|} ds = I_0 + I_1. \end{aligned}$$

Сместим элемент сетки с помощью введения новой переменной  $t = x' - y'$  ( $y'$  фиксируем). Тогда (рис. 1)  $t_1 = x_1 - y_1$ ,  $t_2 = x_2 - y_2$ ,  $a_{i-1} - y_1 \leq t_1 \leq a_i - y_1$ ,  $b_{j-1} - y_2 \leq t_2 \leq b_j - y_2$ ,  $dt_1 = dx_1$ ,  $dt_2 = dx_2$ .

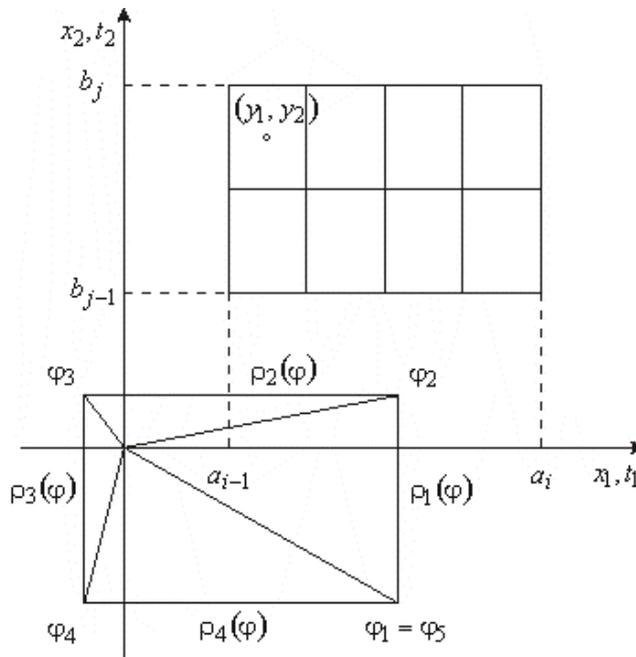


Рис. 1

Вводя полярные координаты  $t_1 = \rho \cos \varphi$ ,  $t_2 = \rho \sin \varphi$ ,  $dt_1 dt_2 = \rho d\rho d\varphi$ , получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega} L_1(x' - y') ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi_{x'}} \int_{\Pi_{y'}} \frac{1}{|x' - y'|} dx' dy' = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi_{y'}} dy' \int_{\Pi_x} \frac{1}{|x' - y'|} dx' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi_{y'}} dy' \int_{\Pi_t(y')} \frac{1}{|t|} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi_{y'}} dy' \sum_{i=1}^4 \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \rho_i d\varphi. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Pi_{x'} = \{a_{i-1} < x_1 < a_i, b_{j-1} < x_2 < b_j\};$$

$$\Pi_t = \{a_{i-1} - y_1 < t_1 < a_i - y_1, b_{j-1} - y_2 < t_2 < b_j - y_2\}, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m};$$

$$\rho_1(\varphi) = \frac{a_i - y_1}{\cos \varphi}, \quad \rho_2(\varphi) = \frac{b_j - y_2}{\sin \varphi}, \quad \rho_3(\varphi) = \frac{a_{i-1} - y_1}{\cos \varphi}, \quad \rho_4(\varphi) = \frac{b_{j-1} - y_2}{\sin \varphi};$$

$$\varphi_1 = \varphi_5 = -\operatorname{arctg} \left| \frac{b_{j-1} - y_2}{a_i - y_1} \right|, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{b_j - y_2}{a_i - y_1},$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left| \frac{a_{i-1} - y_1}{b_j - y_2} \right|, \quad \varphi_4 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{b_{j-1} - y_2}{a_{i-1} - y_1}.$$

Тогда внутренний интеграл вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \rho_i d\varphi &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a_i - y_1}{\cos \varphi} d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \frac{b_j - y_2}{\sin \varphi} d\varphi + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \frac{a_{i-1} - y_1}{\cos \varphi} d\varphi + \int_{\varphi_4}^{\varphi_5} \frac{b_{j-1} - y_2}{\sin \varphi} d\varphi = \\ &= (a_i - y_1) \operatorname{ln} \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (b_j - y_2) \operatorname{ln} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \Big|_{\varphi_2}^{\varphi_3} + \\ &+ (a_{i-1} - y_1) \operatorname{ln} \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_{\varphi_3}^{\varphi_4} + (b_{j-1} - y_2) \operatorname{ln} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \Big|_{\varphi_4}^{\varphi_5}. \end{aligned}$$

Далее, решая систему линейных алгебраических уравнений (41), мы получаем решение задачи дифракции на экране прямоугольной формы.

Ниже представлены результаты расчета модуля компоненты электрического поля  $|E^3|$  на квадратном отверстии (рис. 2, 3). Величина шага равна  $\frac{8}{93}$ , результирующая матрица размера  $961 \times 961$  (рис. 2).

Величина шага равна  $\frac{8}{189}$ , результирующая матрица размера  $3969 \times 3969$  (рис. 3).

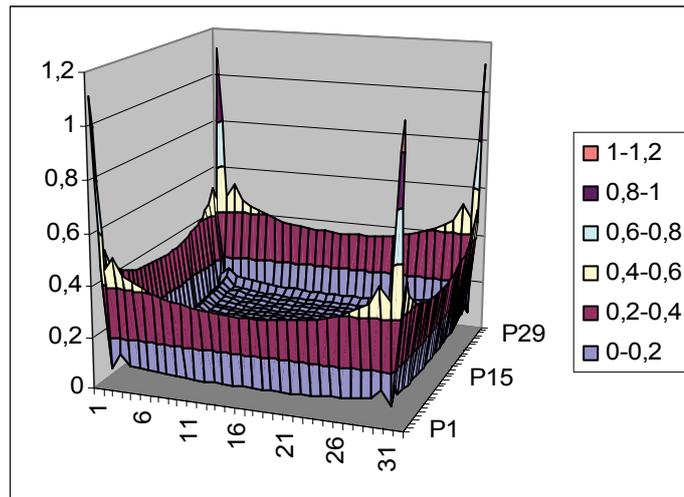


Рис. 2

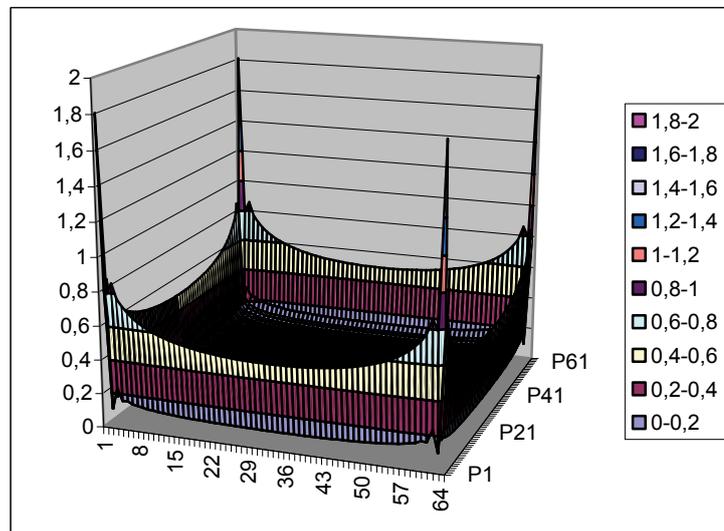


Рис. 3

### Список литературы

1. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : ИПРЖ «Радиотехника», 1998.
2. **Morgenrother, K.** On the instability of resonances in parallelplane waveguides / K. Morgenrother, P. Werner // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 1989. – V. 11. – P. 279–315.
3. **Трибель, Х.** Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М. : Мир, 1980.
4. **Costabel, M.** Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results / M. Costabel // *SIAM J. Math. Anal.* – 1988. – V. 19. – № 3. – P. 613–626.
5. **Kress, R.** Linear Integral Equations. Applied Mathematical sciences. 82. Springer-Verlag / R. Kress. – N. Y., 1989.

**Медведик Михаил Юрьевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет

**Medvedik Mikhail Yuryevich**

PhD in Mathematics, associate professor,  
sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling,  
Penza State University

**Родионова Ирина Анатольевна**

ассистент,  
кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет

**Rodionova Irina Anatolyevna**

assistant professor,  
sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling,  
Penza State University

**Смирнов Юрий Геннадьевич**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
математики и суперкомпьютерного  
моделирования,  
Пензенский государственный  
университет

**Smirnov Yuri Gennadyevich**

Doctor of Science (in Mathematics),  
professor, head of sub-department  
of mathematics and supercomputer  
modeling, Penza State University

---

УДК 517.6

**Медведик, М. Ю.**

**Численный метод решения псевдодифференциального уравнения  
в задаче дифракции в слоях, связанных через отверстие / М. Ю. Медве-  
дик, И. А. Родионова, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений.  
Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). –  
С. 87–99.**

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Аннотация.* Исследованы сплайн-коллокационные методы решения одномерных и многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений. Доказана разрешимость методов, а эффективность иллюстрируется численными примерами.

*Ключевые слова:* гиперсингулярный интеграл, сплайн-коллокационный метод, теорема Адамара.

*Abstract.* Spline-collocation methods for solving one-dimensional and many-dimensional hypersingular integral equations are considered. Solvability of these methods are proved. Application of these methods are demonstrated by numerical examples.

*Keywords:* hypersingular integral, spline-collocation method, Hadamard's theorem.

### Введение

Многие задачи механики, электродинамики, физики моделируются одномерными и многомерными гиперсингулярными интегральными уравнениями [1]. Для приближенного решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений предложен ряд численных методов как прямых [2–4], так и основанных на сведении к сингулярным интегродифференциальным уравнениям. Исследования по приближенным методам решения многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений в настоящее время только начинаются [5, 6]. В данной работе исследуются приближенные методы решения одномерных

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{|\tau-t|^3} + c(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t) \quad (1)$$

и многомерных

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + b(t_1, t_2) \iint_S \frac{x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2}{[(\tau_1-t_1)^2 + (\tau_2-t_2)^2]^{3/2}} = f(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in S, \quad (2)$$

гиперсингулярных интегральных уравнений. В уравнении (2)  $S$  – круг единичного радиуса с центром в начале координат.

Интерес к этим двум конкретным видам гиперсингулярных интегральных уравнений вызван тем, что уравнением (1) моделируется электрический вибратор [7], а уравнением (2) – одна из задач теории разрушения – задача растяжения круглого цилиндра единичными усилиями перпендикулярными к его поверхности. При такой постановке задачи, уравнение (2) сводится к уравнению

$$\iint_S \frac{\sqrt{1-\tau_1^2-\tau_2^2}x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2}{[(\tau_1-t_1)^2 + (\tau_2-t_2)^2]^{3/2}} = 1, (t_1, t_2) \in S. \quad (3)$$

В первом разделе даны определения гиперсингулярных интегралов, которые непосредственно используются в работе. Во втором разделе исследуется применение сплайн-коллокационного метода нулевого порядка к решению уравнения (1). В третьем разделе исследуется сплайн-коллокационный метод нулевого порядка для решения уравнения (2). Из приведенных рассуждений следует, что этот метод применим к гиперсингулярным интегральным уравнениям, определенным в произвольных выпуклых областях. В качестве приложения полученного утверждения рассмотрено уравнение (3). В четвертом разделе рассмотрены численные примеры.

### 1 Определения гиперсингулярных интегралов

Напомним определения гиперсингулярных интегралов, которые являются некоторым обобщением классического определения конечной части интеграла, данного Ж. Адамаром [8].

**Определение 1** [8]. Конечной частью интеграла  $\int_a^b \frac{f(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}}$ , где

$0 < \alpha < 1$ , называется предел

$$\int_a^b \frac{f(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}} = \lim_{x \rightarrow b} \left[ \int_a^x \frac{f(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}} \right]. \quad (4)$$

Здесь  $B(x)$  – произвольная функция, которая удовлетворяет следующим условиям: 1) предел (4) существует; 2) функция  $B(x)$  имеет непрерывные производные до  $(p-1)$ -го порядка включительно в окрестности точки  $x = b$ .

Произвольный выбор функции  $B(x)$  никак не влияет на значение конечной части интеграла Адамара.

Позднее это определение было обобщено Л. А. Чикиным [9] на случай, когда особая точка лежит внутри интервала интегрирования, и данные интегралы рассматривают в смысле главного значения Коши-Адамара.

**Определение 2** [9]. Конечной частью интеграла  $\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-c)^p} d\tau$ ,

$-1 < c < 1$ ,  $p = 2, 3, \dots$  называется предел

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-c)^p} d\tau = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \int_{-1}^{c-\eta} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-c)^p} d\tau + \int_{c+\eta}^1 \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-c)^p} d\tau - \frac{f(\eta)}{\eta^{p-1}} \right],$$

где функция  $f(\eta)$  удовлетворяет следующим условиям: 1) имеет непрерывные производные до  $(p-1)$ -го порядка в окрестности точки  $c$ ; 2) предел существует.

Дадим определение двумерных гиперсингулярных интегралов, которые непосредственно используются в работе:

$$\iint_{ac}^{bd} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\left[ (\tau_1 - x)^2 + (\tau_2 - y)^2 \right]^{p/2}}, \quad (5)$$

где  $a < x < b$ ,  $c < y < d$ ,  $p = 3, 4, \dots$

Введем обозначения:  $\eta$  – достаточно малое вещественное число;  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ .

**Определение 3.** Конечной частью интеграла (5) называется предел

$$\iint_{ac}^{bd} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\left[ (\tau_1 - x)^2 + (\tau_2 - y)^2 \right]^{p/2}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \iint_{\Omega_\eta^*} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\left[ (\tau_1 - x)^2 + (\tau_2 - y)^2 \right]^{p/2}} - \frac{g(\eta)}{\eta^{p-2}} \right], \quad (6)$$

где  $\Omega_\eta^* = \Omega \setminus R((x, y), \eta)$ ;  $R((x, y), \eta)$  – шар радиуса  $\eta$  с центром в точке  $(x, y)$ ;  $g(\eta)$  – функция, удовлетворяющая следующим условиям: 1) предел (6) существует; 2) функция  $g(\eta)$  имеет частные производные, по крайней мере, до  $(p-1)$ -го порядка по каждой переменной в окрестности точки  $(x, y)$ .

Иногда наиболее предпочтительным для непосредственных вычислений является определение, когда область  $\Omega_\eta^*$  задана в несколько иной форме.

**Определение 4.** Конечной частью интеграла (5) называется предел

$$\iint_{ac}^{bd} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\left[ (\tau_1 - x)^2 + (\tau_2 - y)^2 \right]^{p/2}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \iint_{\Omega_\eta} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\left[ (\tau_1 - x)^2 + (\tau_2 - y)^2 \right]^{p/2}} - \frac{g(\eta)}{\eta^{p-2}} \right], \quad (7)$$

где  $\Omega_\eta = \Omega \setminus [x - \eta, x + \eta; y - \eta, y + \eta]$ ;  $g(\eta)$  – функция, удовлетворяющая следующим условиям: 1) предел (7) существует; 2) функция  $g(\eta)$  имеет частные производные по крайней мере до  $(p-1)$ -го порядка по каждой переменной в окрестности точки  $(x, y)$ .

Докажем эквивалентность двух последних определений. Для этого достаточно показать, что

$$\left| \iint_{\Omega_\eta \setminus \Omega_\eta^*} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\left[ (\tau_1 - x)^2 + (\tau_2 - y)^2 \right]^{p/2}} \right| = O\left( \frac{1}{\eta^{p-2}} \right).$$

Нетрудно видеть, что

$$\left| \iint_{\Omega_\eta \setminus \Omega_\eta^*} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\left[ (\tau_1 - x)^2 + (\tau_2 - y)^2 \right]^{p/2}} \right| \leq \iint_G \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\left[ (\tau_1 - x)^2 + (\tau_2 - y)^2 \right]^{p/2}} =$$

$$= 8 \int_0^{\pi/4} \int_{\eta/\cos\varphi}^{\eta} \frac{\rho}{\rho^p} d\rho d\varphi = 2\pi \frac{\rho^{2-p}}{2-p} \Big|_{\eta/\cos\varphi}^{\eta} = \frac{A}{\eta^{p-2}},$$

где  $G = [x - \eta, x + \eta; y - \eta, y + \eta] \setminus R((x, y), \eta)$ .

Таким образом, эквивалентность определений 3 и 4 доказана.

Введем также определение гиперсингулярных интегралов для случая, когда особая точка лежит на границе области.

**Определение 5.** Конечной частью интеграла (6) называется предел

$$\iint_{ac}^{bd} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{[(\tau_1 - a)^2 + (\tau_2 - y)^2]^{p/2}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \iint_{\Omega_\eta} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{[(\tau_1 - a)^2 + (\tau_2 - y)^2]^{p/2}} - \frac{g(\eta)}{\eta^{p-2}} \right], \quad (8)$$

где  $\Omega_\eta = \Omega \setminus R((a, y), \eta)$ ;  $R((a, y), \eta)$  – шар радиуса  $\eta$  с центром в точке  $(a, y)$ ;  $g(\eta)$  – функция, удовлетворяющая следующим условиям: 1) предел (8) существует; 2) функция  $g(\eta)$  имеет частные производные по крайней мере до  $(p-1)$ -го порядка по каждой переменной в окрестности точки  $(a, y)$ .

В случае, если особая точка расположена в вершине прямоугольника  $[a, b; c, d]$ , может быть введено аналогичное определение.

## 2 Приближенное решение одномерного гиперсингулярного интегрального уравнения с особенностью третьего порядка

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции  $x_N(t)$ , определенной формулой

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \psi_k(t)$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in \Delta_k, \\ 0, & \text{при } t \in [-1, 1] \setminus \Delta_k, \end{cases}$$

$$\Delta_k = [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-2, \quad \Delta_{N-1} = [t_{N-1}, t_N], \quad t_k = -1 + 2k/N, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Введем еще одну систему узлов  $\bar{t}_k = t_k + k/N$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Тогда коэффициенты  $\{\alpha_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_l) \alpha_l + b(\bar{t}_l) \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} + c(\bar{t}_l) \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau = f(\bar{t}_l), \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (9)$$

Докажем сходимость коллокационного метода. Для этого воспользуемся теоремой Адамара о разрешимости систем линейных алгебраических уравнений [10].

**Теорема 1** (Адамара). Если для матрицы  $A$  размерности  $n \times n$  выполняются неравенства

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

то матрица  $A$  является невырожденной.

Оценим модули диагональных элементов, принимая во внимание, что данные интегралы рассматриваются в смысле Адамара. Очевидно, что

$$\int_{-1/N}^{1/N} \frac{d\tau}{|\tau|^3} = - \int_{-1/N}^0 \frac{d\tau}{\tau^3} + \int_0^{1/N} \frac{d\tau}{\tau^3} = -N^2, \quad \int_{-1/N}^{1/N} \frac{d\tau}{\tau^2} = -2N.$$

Рассмотрим частный случай, когда коэффициенты  $b(\bar{t}_l)$  и  $c(\bar{t}_l)$  имеют одинаковый знак, а коэффициент  $a(\bar{t}_l)$  – протоположный. Получаем, что:

$$\begin{aligned} & \left| a(\bar{t}_l) + b(\bar{t}_l) \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} + c(\bar{t}_l) \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \int_{\Delta_l} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right| \geq \\ & \geq \left| a(\bar{t}_l) + b(\bar{t}_l) \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} + c(\bar{t}_l) \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} \right| - \left| \int_{\Delta_l} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right| \geq \\ & \geq \left| a(\bar{t}_l) - b(\bar{t}_l)N^2 - 2Nc(\bar{t}_l) \right| - \frac{2}{N}H^* \geq |a(\bar{t}_l)| + |b(\bar{t}_l)|N^2 + 2|c(\bar{t}_l)|N - \frac{2}{N}H^*. \quad (10) \end{aligned}$$

Здесь  $H^* = \max |h(t, \tau)|$ .

Оценим сумму модулей внедиагональных элементов.

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| b(\bar{t}_l) \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} + c(\bar{t}_l) \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right| \leq \\ & \leq \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| b(\bar{t}_l) \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} \right| + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| c(\bar{t}_l) \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} \right| + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right| = \\ & = \left| b(\bar{t}_l) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} \right| + \left| c(\bar{t}_l) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} \right| + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right| \end{aligned}$$

$$= |b(\bar{t}_l)| \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} \right| + |c(\bar{t}_l)| \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} \right| + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right|.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности, используя определение интеграла Адамара. При этом, для краткости, промежуточные вычисления опускаются. Очевидно, при  $l \neq 0, N-1$  имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} \right| = \left| - \int_{-1}^{t_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^3} + \int_{t_{l+1}}^1 \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^3} \right| = \\ &= \left| N^2 - \frac{1}{2(1 + \bar{t}_l)^2} - \frac{1}{2(1 - \bar{t}_l)^2} \right| = N^2 \left( 1 - \frac{1}{2(2l+1)^2} - \frac{1}{2(2N-2l-1)^2} \right). \end{aligned}$$

Как видно, максимальное значение данного выражения достигается при  $l = (N-1)/2$  (не ограничивая общности, будем считать, что  $N$  нечетно). Тогда получим

$$I_1 \leq N^2 \left( 1 - \frac{1}{N^2} \right). \quad (11)$$

Аналогично:

– при  $l = 0$  получаем:

$$\left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_0|^3} \right| = \left| \int_{t_1}^1 \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_0)^3} \right| = N^2 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2N-1)^2} \right|$$

– при  $l = N-1$  получаем:

$$\left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_{N-1}|^3} \right| = \left| - \int_{-1}^{t_{N-1}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_{N-1})^3} \right| = N^2 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2N-1)^2} \right|$$

Далее оценим следующую сумму:

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} \right| = \left| \int_{-1}^{t_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \int_{t_{l+1}}^1 \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} \right| = \\ &= \left| 2N - \frac{1}{(1 + \bar{t}_l)} - \frac{1}{(1 - \bar{t}_l)} \right| = N \left( 2 - \frac{1}{(2l+1)} - \frac{1}{(2N-2l-1)} \right). \end{aligned}$$

Как видно, максимальное значение данного выражения достигается при  $l = (N - 1)/2$  (не ограничивая общности, будем считать, что  $N$  нечетно). Тогда получим

$$I_2 \leq N \left( 2 - \frac{2}{N} \right). \quad (12)$$

Для случая  $l = 0$  получаем

$$\left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_0)^2} \right| = \left| \int_{t_1}^1 \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_0)^2} \right| = N \left| 1 - \frac{1}{(2N-1)} \right|.$$

Для случая  $l = N - 1$  получаем

$$\left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_{N-1})^2} \right| = \left| \int_{-1}^{t_{N-1}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_{N-1})^2} \right| = N \left| 1 - \frac{1}{(2N-1)} \right|.$$

Далее оценим сумму, содержащую регулярные интегралы:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right| \leq \left( 2 - \frac{2}{N} \right) H^*. \quad (13)$$

Здесь  $H^* = \max |h(t, \tau)|$ .

Теперь, принимая во внимание оценки (10)–(13), покажем, что система аппроксимирующих уравнений однозначно разрешима. Для этого воспользуемся условиями теоремы Адамара, которые будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} |a(\bar{t}_l)| + |b(\bar{t}_l)| N^2 + 2|c(\bar{t}_l)| N - \frac{2}{N} H^* > |b(\bar{t}_l)| N^2 \left( 1 - \frac{1}{N^2} \right) + \\ + |c(\bar{t}_l)| N \left( 2 - \frac{2}{N} \right) + \left( 2 - \frac{2}{N} \right) H^*. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$|a(\bar{t}_l)| > 2H^* - \frac{|b(\bar{t}_l)|}{N^2} - \frac{2|c(\bar{t}_l)|}{N}. \quad (14)$$

Таким образом, справедливость соотношения (14) влечет за собой выполнение условия теоремы Адамара. В случае значительного увеличения числа элементов разбиения и соответственно размерности системы аппроксимирующих уравнений неравенство (14) примет вид

$$|a(\bar{t}_l)| > 2H^*.$$

**Замечание 1.** При рассмотрении одномерного гиперсингулярного интегрального уравнения вида (1), не содержащего регулярный интеграл, условие (14) будет выполняться автоматически.

**Замечание 2.** При рассмотрении гиперсингулярного интегрального уравнения (1) при  $a(t) \equiv 0$  и  $h(t) \equiv 0$  из условия (14) следует его разрешимость при  $N \geq 1$ .

Выше был рассмотрен частный случай гиперсингулярного интегрального уравнения (1). Интерес к этому случаю вызван тем, что уравнениями вида (1) при  $a(t) \equiv 0$  и  $h(t) \equiv 0$  описывается уравнение электрического вибратора [7].

В общем случае приближенное решение уравнения (1) ищется в виде кусочно-постоянной функции  $x_N(t)$ , коэффициенты  $\{\alpha_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , которой определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_l)x_N(\bar{t}_l) + b(\bar{t}_l) \sum_{k=0}^{N-1} ' \alpha_k \int_{\Delta_k} \frac{\Psi_k(\tau) d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} + c(\bar{t}_l) \sum_{k=0}^{N-1} ' \alpha_k \int_{\Delta_k} \frac{\Psi_k(\tau) d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) x_N(\tau) d\tau = f(\bar{t}_l), \quad l = 0, 1, \dots, N-1,$$

где  $\sum'$  означает суммирование по  $k \neq l-v, l-v+1, \dots, l-1, l+1, \dots, l+v-1$ . Величина параметра  $v$  выбирается из условия выполнения теоремы Адамара об обратимости матриц. Существование такого параметра доказывается по аналогии с работами [2-4].

### 3 Сплайн-коллокационный метод

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение вида (2). Для приближенного решения этого уравнения покроем область интегрирования  $S$  следующей сеткой.

Обозначим через  $N$  достаточно большое натуральное число и покроем область  $D = [-1, 1]^2$  квадратами  $\Delta_{kl} = [v_k, v_{k+1}; v_l, v_{l+1}]$ ,  $k, l = 0, 1, \dots, N-1$ , где  $v_k = -1 + 2k/N$ ,  $k, l = 0, 1, \dots, N$ . Квадраты  $\Delta_{kl}$ , полностью расположенные в области  $S$ , назовем базисными и обозначим их через  $\Delta_{kl}^*$ . Квадраты  $\Delta_{kl}$ , не являющиеся базисными, но имеющие с областью  $S$  пересечение с мерой больше нуля (это пересечение обозначим через  $\Delta_{kl}^{**}$ ), назовем отмеченными. Каждый из отмеченных квадратов объединяем с тем из базисных квадратов, для которого общая граница с отмеченным квадратом будет наибольшей.

Таким образом, пусть общее число базисных квадратов  $\bar{\Delta}_{kl}^*$  (через  $\bar{\Delta}_{kl}^*$  обозначен базисный квадрат  $\Delta_{kl}^*$ , если он не имеет присоединенного отмеченного квадрата, или объединение базисного квадрата  $\Delta_{kl}^*$  с присоединенной областью  $\Delta_{kl}^{**}$ , если базисный квадрат граничит с соответствующим от-

меченным квадратом) равно  $N_0$ . Обозначим центры базисных квадратов через  $v_{kl}^*$ .

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_{kl} \Psi_{kl}^*(t_1, t_2), \quad (15)$$

где  $\sum \sum'$  означает суммирование по базисным квадратам;

$$\Psi_{kl}^*(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & \text{при } (t_1, t_2) \in \bar{\Delta}_{kl}^*, \\ 0, & \text{при } (t_1, t_2) \notin D \setminus \bar{\Delta}_{kl}^*. \end{cases}$$

Коэффициенты  $\{\alpha_{kl}\}$  будем определять из системы линейных алгебраических уравнений, которая строится следующим образом.

Подставим в уравнение (2) вместо неизвестной функции  $x(t_1, t_2)$  ее приближенное значение  $x_N(t_1, t_2)$  и приравняем обе части уравнения (2) в точках  $v_{kl}^*$ , являющихся центром базисных квадратов. В результате приходим к системе алгебраических уравнений вида

$$a(v_{kl}^*)\alpha_{kl} + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} b(v_{kl}^*)\alpha_{ij} \iint_{\bar{\Delta}_{ij}^*} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left[ (\tau_1 - v_k)^2 + (\tau_2 - v_l)^2 \right]^{3/2}} = f(v_{kl}^*), \quad (16)$$

$k, l = 0, 1, \dots, N-1$ .

Иследуем сходимость вычислительной схемы (16). Для этого воспользуемся теоремой Адамара об обратимости квадратных матриц.

Прежде всего необходимо оценить снизу интеграл

$$\frac{1}{N} \frac{1}{N} \int \int \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left[ \tau_1^2 + \tau_2^2 \right]^{3/2}} \quad (17)$$

и оценить сверху сумму

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \iint_{\bar{\Delta}_{ij}^*} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left[ (\tau_1 - v_k)^2 + (\tau_2 - v_l)^2 \right]^{3/2}}, \quad (18)$$

где  $\sum \sum'$  означает суммирование по  $(i, j) \neq (k, l)$ .

Нетрудно видеть, что сумма (18) имеет наибольшее значение при  $(k, l) = \left( \left[ \frac{N}{2} \right] + 1, \left[ \frac{N}{2} \right] + 1 \right)$  (не ограничивая общности можно считать  $N$  нечетным числом).

Таким образом, вместо (18) достаточно оценить сумму

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \iint_{\Delta_{ij}^*} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}}, \quad (19)$$

где  $\sum \sum$  означает суммирование по  $(i, j) \neq \left( \left[ \frac{N}{2} \right] + 1, \left[ \frac{N}{2} \right] + 1 \right)$ .

Приступим к оценке интеграла (17) и суммы (19).

Очевидно,

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{1}{N}}^{\frac{1}{N}} \int_{-\frac{1}{N}}^{\frac{1}{N}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}} \geq \iint_{B\left(0, \frac{1}{N}\right)} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}} = \\ & = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \iint_{B\left(0, \frac{1}{N}\right) \setminus B(0, \eta)} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}} + \frac{A(\eta)}{\eta} \right] = 2\pi N, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $B(0, R)$  – шар радиуса  $R$  с центром в точке  $O(0,0)$ .

С другой стороны,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \iint_{\Delta_{ij}^*} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}} \leq \iint_{B(0, \sqrt{2}) \setminus B\left(0, \frac{1}{N}\right)} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}} = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{N}}^{\sqrt{2}} \frac{d\rho}{\rho^2} d\varphi = 2\pi \left( N - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Таким образом, если при всех значениях  $v_{kl}^*$ ,  $k, l = 0, 1, \dots, N-1$  выполнены условия

$$\left| 2\pi N b(v_{kl}^*) + a(v_{kl}^*) \right| > 2\pi \left( N - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |b(v_{kl}^*)|, \quad (21)$$

то тем самым выполнены условия теоремы Адамара для системы уравнений (16). Из теоремы Адамара вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (21). Тогда система уравнений (2) имеет единственное решение.

Опишем применение полученного результата к приближенному решению уравнения (3). Введем новую неизвестную функцию

$$u(t_1, t_2) = \sqrt{1 - t_1^2 - t_2^2} x(t_1, t_2)$$

и рассмотрим уравнение

$$\iint_S \frac{u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{[(\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2]^{3/2}} = 1, (t_1, t_2) \in S. \quad (22)$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (2), и к нему применим описанный выше алгоритм.

**Замечание.** Переход от уравнения (3) к уравнению (22) носит формальный характер. Подобный переход естественно использовать для нахождения решения в области  $S_a = R((0,0), 1-a)$ , где  $a > 0$ . При использовании перехода от уравнения (3) к уравнению (22) для нахождения решения в окрестности границы области  $S$  возникает значительная погрешность.

#### 4 Численные примеры

Изложенный в разд. 3 сплайн-коллокационный метод был построен для модельного примера – гиперсингулярного интегрального уравнения теории трещин.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\iint_S \frac{\sqrt{1 - \tau_1^2 - \tau_2^2} x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{[(\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2]^{3/2}} = -\frac{3\pi^2}{2} t_1, \quad (23)$$

которое имеет решение  $x(\tau_1, \tau_2) = t_1$ . Здесь  $S$  – единичный круг с центром в начале координат.

Сравнение точного и приближенного решения проводилось с учетом весовой функции, т.е. для функций  $u(t_1, t_2) = \sqrt{1 - t_1^2 - t_2^2} x(t_1, t_2)$ .

На рис. 1, 2 показана зависимость максимальной абсолютной погрешности от радиуса области, в которой отыскивается решение для уравнения (23).

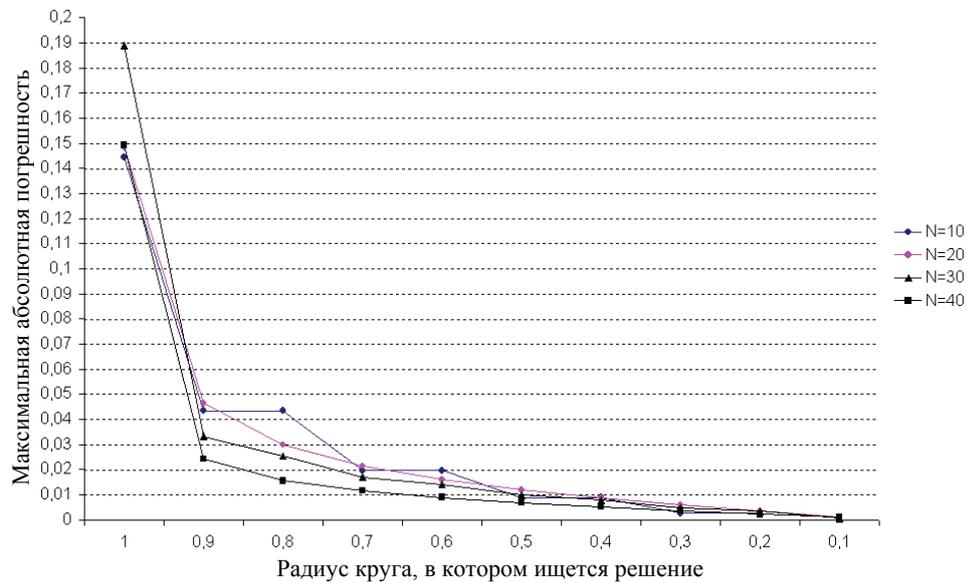


Рис. 1

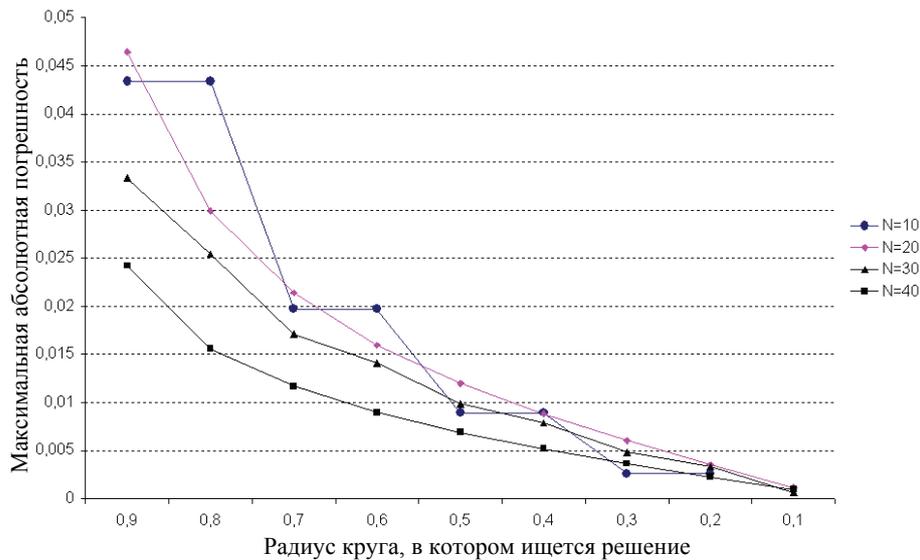


Рис. 2

На рис. 1, 2 приведены решения для различного числа элементов разбиения  $N$ , и, как видно из представленных результатов, наибольшая погрешность наблюдается в кольце с внешним радиусом 1 и внутренним радиусом 0,9, ближе к центру области максимальная абсолютная погрешность, как минимум, на порядок меньше. Поэтому на рис. 2 для наглядности результатов показаны те же графики, что и на рис. 1, но в случае, когда радиус области, в котором рассматривается решение, изменяется в пределах от 0,9 до 0,1.

#### Список литературы

1. **Панасюк, В. В.** Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, З. Т. Назарчук – Киев : Наукова думка, 1984. – 344 с.
2. **Бойков, И. В.** Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Е. Г. Романова // International Conference on Computational Mathematics. – Part first. Novosibirsk. – 2004. – P. 411–417.
3. **Бойков, И. В.** Сплайн-коллокационный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Вестник Харк. нац. ун-та. – 2007. – № 775. – Вып. 7. – С. 36–49. – (Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления).
4. **Бойков, И. В.** Приближенные методы решения составных особых интегральных уравнений / И. В. Бойков, Е. Г. Романова // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : труды II Международной научно-технической конференции. – Пенза, 2007. – С. 31–36.
5. **Вайникко, Г. М.** Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский – М. : Янус, 2001. – 508 с.
6. **Оседец, И. В.** Приближенное обращение матриц / И. В. Оседец, Е. Е. Тыртышников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45. – № 2. – С. 315–326.
7. **Бойков И. В.** Применение гиперсингулярных интегральных уравнений к численному моделированию электрического вибратора / И. В. Бойков, Д. В. Тарасов //

Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2008. – № 4. – С. 94–106.

8. **Адамар, Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
9. **Чикин, Л. А.** Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярные интегральные уравнения / Л. А. Чикин // Ученые записки Казанского гос. ун-та. – 1953. – Т. 113. – № 10. – С. 53–105.
10. **Гантмахер, Ф. Р.** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1976. – 576 с.

---

***Бойков Илья Владимирович***

доктор физико-математических наук,  
профессор,  
заведующий кафедрой высшей  
и прикладной математики,  
Пензенский государственный  
университет

***Boykov Ilya Vladimirovich***

Doctor of Science (in Mathematics),  
professor, head of sub-department  
of highest and applied mathematics,  
Penza State University

***Стасюк Богдан Мирославович***

кандидат физико-математических наук,  
доцент,  
кафедра сопротивления материалов,  
Национальный университет  
«Львовська политехника»  
(г. Львов, Украина)

***Stasuk Bogdan Miroslavovich***

PhD in Mathematics, associate professor,  
sub-department of resistance of materials,  
Lvov National Polytechnic University

***Тарасов Дмитрий Викторович***

ассистент, кафедра высшей  
и прикладной математики,  
Пензенский государственный  
университет

***Tarasov Dmitriy Victorovich***

Assistant professor, sub-department  
of highest and applied mathematics,  
Penza State University

E-mail: tarasovdv@mail.ru

---

УДК 517.392

**Бойков, И. В.**

**Приближенное решение некоторых классов гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Б. М. Стасюк, Д. В. Тарасов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 100–112.**

## ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ НАНОПРОВОЛОК В ИНФРАКРАСНОМ ДИАПАЗОНЕ\*

*Аннотация.* Методом автономных блоков с виртуальными каналами Флоке и магнитными нановключениями проведен электродинамический расчет  $S$ -параметров многомодовой матрицы рассеяния двумерной периодической решетки продольно намагниченных ферромагнитных (железо) нанопроволок в зависимости от геометрических размеров нанопроволок и решетки, а также величины постоянного поля подмагничивания на частоте 30 ТГц.

*Ключевые слова:* решетка ферромагнитных нанопроволок, уравнения Максвелла, дифракция электромагнитной волны, коэффициент отражения, коэффициент прохождения

*Abstract.* By using the method of autonomous blocks with virtual Floquet channels the electrodynamic calculation of the parameters of the multimode scattering matrix of 2D-arrays of ferromagnetic metallic (iron) nanowires with the longitudinal magnetization, depending on the geometrical sizes of nanowires and arrays and the value of the bias magnetic field at a frequency of  $f = 30$  THz.

*Keyword:* array of ferromagnetic nanowires, Maxwell's equations, diffraction of electromagnetic waves, transmission coefficient, reflection coefficient.

### Введение

Одним из наиболее перспективных направлений оптики нанометровых структур является нанофотоника – область науки, главной целью которой является создание световых (фотонных) устройств с размером не более нескольких микрон, которые были бы оптическими аналогами электронных микрочипов.

Интегральная фотоника находится в той стадии, когда для достижения главной поставленной цели требуются дополнительные фундаментальные исследования. Развитие элементной базы (оптические ключи, оптические транзисторы, устройства для сбора, хранения и распределения информации) тормозится недостаточным уровнем теории, которая заметно отстает по сравнению с достижениями разработчиков. Разработки новых оптических затворов (ключей), фильтров, операционных усилителей и других элементов зачастую опираются на интуицию экспериментаторов [1, 2], и это положение нельзя признать нормальным.

---

\* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 05-08-33503.

В этой связи актуальной является задача теоретического исследования физических механизмов взаимодействия электромагнитных волн с системами магнитных наночастиц и нанопроволок, магнитными фотонными кристаллами и возникающих геометрических, размерных эффектов на математических моделях электродинамического уровня строгости в терагерцовом диапазоне частот.

### 1 Постановка задачи дифракции

Строгая постановка краевой задачи дифракции электромагнитных волн на решетке ферромагнитных нанопроволок заключается в следующем. Необходимо решить систему уравнений Максвелла с электродинамическими граничными условиями

$$\operatorname{rot} H(t) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \sigma \vec{E}(t); \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} E(t) = - \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}$$

совместно с уравнением Ландау-Лифшица движения вектора намагниченности в ферромагнетике с учетом обменного взаимодействия [3]

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma (\vec{M}(t) \times \vec{H}_{\text{эф}}(t)) + \omega_r (\chi_0 \vec{H}(t) - \vec{M}(t)), \quad (2)$$

где  $\vec{E}(t), \vec{H}(t)$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей;  $\vec{B}(t)$  – вектор магнитной индукции;  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды;  $\sigma$  – электропроводность среды;  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная;  $\vec{M}(t)$  – вектор намагниченности среды;  $\vec{H}_{\text{эф}}(t) = \vec{H}(t) + \vec{H}_q(t)$  – суммарное эффективное поле, включающее поле обменного взаимодействия,

$$\vec{H}_q(t) = q \nabla^2 \vec{M}(t),$$

здесь  $q = \frac{2A}{\mu_0 M_s}$ ;  $A$  – константа обменного взаимодействия;  $M_s$  – намагниченность насыщения;  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\gamma$  – гиромагнитное отношение;  $\omega_r$  – частота релаксации;  $\chi_0$  – статическая восприимчивость.

Рассмотрим задачу дифракции плоской однородной электромагнитной волны на двумерной периодической решетке ферромагнитных нанопроволок, расположенных в немагнитной диэлектрической матрице с относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon_\nu, \mu_\nu$  (рис. 1).

Падающая ТЕМ-волна (с волновым вектором  $\vec{k}$ , амплитудой  $C_{1(1)}^+(\omega)$ , частотой  $\omega$ ) распространяется поперечно (вдоль оси  $z$ ) по отношению к направлению постоянного поля подмагничивания  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_y$ , приложенного продольно вдоль оси магнитных нанопроволок (рис. 1).

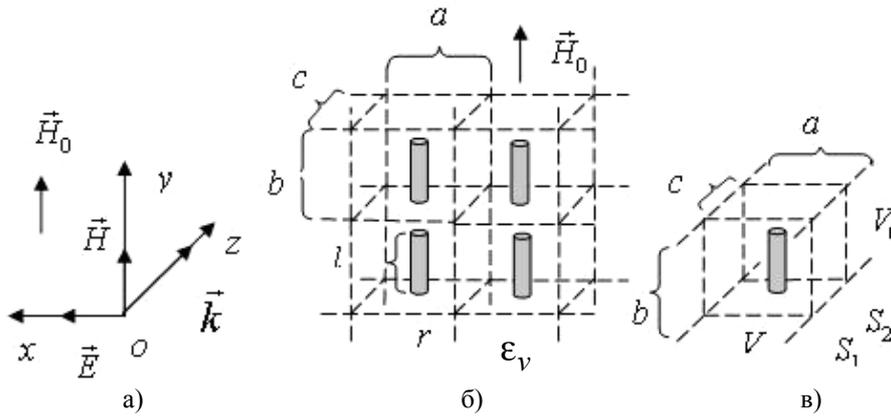


Рис. 1 Дифракция электромагнитной волны на периодической решетке магнитных нанопроволок: а – ориентация падающей ТЕМ-волны с волновым вектором  $\vec{k}$ ; б – двумерная решетка продольно намагниченных ферромагнитных нанопроволок; в – автономный блок (АБ) с каналами Флоке, содержащий магнитную нанопроволоку:  $S_1, S_2$  – входные сечения АБ;  $V_0$  – внутренняя область АБ;  $V$  – область магнитного нановключения (нанопроволока)

Элементарную ячейку периодической нанорешетки (рис. 1, б) с геометрическими размерами  $a, b, c$ , содержащую магнитную нанопроволоку радиуса  $r$  и длиной  $l$ , представим в виде автономного блока (рис. 1, в) с виртуальными каналами Флоке и магнитным нановключением (МФАБ) [4]. Магнитные нанопроволоки находятся между входными сечениями  $S_1, S_2$  (рис. 1) АБ, рассматриваемого как волноводный трансформатор [5].

Трехмерная краевая задача дифракции для уравнений (1), (2) с электродинамическими граничными условиями и условиями неасимптотического излучения [6] решается с помощью вычислительного алгоритма на основе метода МФАБ [4].

## 2 S-параметры решетки магнитных нанопроволок в зависимости от постоянного поля намагничивания при изменении геометрических размеров нанопроволок и решетки

Методом МФАБ проведен электродинамический расчет S-параметров – элементов  $|R_{11}^{\alpha\beta}|$  ( $\alpha, \beta$  – номера входных сечений  $S_\alpha, S_\beta, \alpha=1, 2; \beta=1, 2$ ) многомодовой многоканальной матрицы рассеяния периодической решетки магнитных нанопроволок (рис. 1) в зависимости от соотношения геометрических размеров нанопроволок и решетки, а также величины постоянного поля подмагничивания в терагерцовом диапазоне частот.

Результаты электродинамического расчета модуля коэффициентов отражения  $|R_{11}^{11}|$  и прохождения  $|R_{11}^{12}|$  ТЕМ-волны через двумерные периодические решетки ферромагнитных нанопроволок (при постоянном поле подмагничивания  $H_0 = 75$  Э), а также электрических нанопроволок (при  $H_0 = 0$ ) в зависимости от диаметра нанопроволок  $2r$  (период нанорешетки  $a = 3,5r$ ) на частоте  $f = 30$  ТГц приведены на рис. 2.

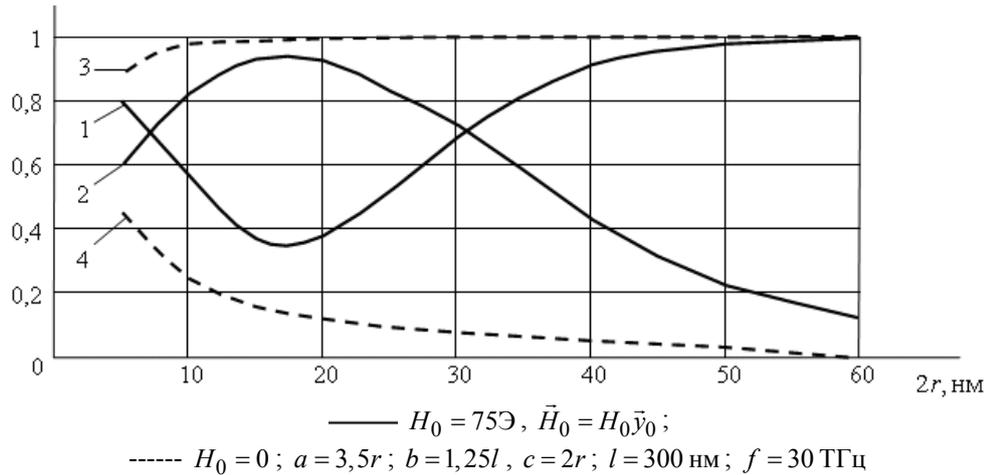


Рис. 2. Модуль коэффициентов отражения  $|R_{11}^{11}|$  и прохождения  $|R_{11}^{12}|$  ТЕМ-волны через решетки ферромагнитных и электрических нанопроволок в зависимости от диаметра нанопроволок  $2r$ : кривые 1, 3 – модуль коэффициента отражения  $|R_{11}^{11}|$ ; кривые 2, 4 – модуль коэффициента прохождения  $|R_{11}^{12}|$

Результаты математического моделирования дифракции ТЕМ-волны на периодической решетке ферромагнитных нанопроволок (кривые 1, 2 на рис. 2) получены при следующих параметрах ферромагнетика (железо): намагниченность насыщения  $4\pi M_0 = 21580 \text{ Гс}$ , проводимость  $\sigma = 1,03 \cdot 10^5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $\mu_0 q = 2,2 \cdot 10^{-9} \text{ Э} \cdot \text{см}^2$ , параметр диссипации  $\alpha = 0,0023$  ( $\alpha = \frac{\omega_r}{\omega_H}$ , где  $\omega_H = \gamma H_0$ ) [3]. Ферромагнитные нанопроволоки расположены в немагнитной диэлектрической матрице – среде с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_v = 5$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu_v = 1$ .

Для сравнения на рис. 2 приведены также результаты электродинамического расчета модуля коэффициентов отражения  $|R_{11}^{11}|$  и прохождения  $|R_{11}^{12}|$  (кривые 3, 4 на рис. 2) ТЕМ-волны через решетку электрических нанопроволок (металлических нанопроволок в отсутствие поля подмагничивания  $H_0 = 0$ ).

Как следует из результатов математического моделирования (рис. 2), зависимости модуля коэффициентов отражения  $|R_{11}^{11}|$  и прохождения  $|R_{11}^{12}|$  ТЕМ-волны через периодическую решетку магнитных нанопроволок имеют экстремумы (кривые 1, 2 на рис. 2) при изменении геометрических размеров магнитной нанорешетки (диаметра нанопроволок  $2$  и периода решетки  $a = 3,5r$ ).

Для сравнения отметим, что модуль коэффициента прохождения  $|R_{11}^{12}|$  ТЕМ-волны через решетку электрических нанопроволок плавно уменьшается и его значение стремится к нулю (кривая 4 на рис. 2), а значение модуля ко-

ээффициента отражения  $|R_{11}^{11}|$  плавно стремится к единице (кривая 3 на рис. 2) при увеличении диаметра нанопроволок  $2r > 30$  нм. Это объясняется тем, что если диаметр  $2r$  нанопроволок становится больше, чем толщина скин-слоя в металле  $\delta = \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}$ , где  $k_0$  – волновое число волны в свободном пространстве ( $\delta = 30$  нм для немагнитного железа при  $\mu = \mu_0$  на частоте  $f = 30$  ТГц), то при  $2r > \delta$  электромагнитная волна почти полностью отражается от решетки электрических нанопроволок, как от эффективной «металлической пленки» (толщиной  $2r$  больше, чем толщина скин-слоя  $\delta$  в металле), при этом коэффициент отражения  $|R_{11}^{11}| \sim 1$  (кривая 3 на рис. 2 при  $2r > 30$  нм).

На электродинамическом уровне строгости с помощью вычислительно-го алгоритма на основе метода МФАБ [4] проведено численное исследование управляемости  $S$ -параметрами матрицы рассеяния двумерной периодической решетки ферромагнитных нанопроволок с помощью внешнего магнитного поля в терагерцовом диапазоне частот.

Расчетные зависимости модуля коэффициента прохождения  $|R_{11}^{12}|$  ТЕМ-волны через двумерную периодическую решетку ферромагнитных нанопроволок (рис. 1) от величины постоянного поля намагничивания  $H_0$  для различных диаметров нанопроволок ( $2r < \delta$ ) и периода решетки  $a = 3,5r$  на частоте  $f = 30$  ТГц приведены на рис. 3.

Как следует из результатов математического моделирования, зависимости модуля коэффициента прохождения  $|R_{11}^{12}|$  от приложенного внешнего постоянного магнитного поля  $H_0$  имеют максимумы (кривые 1–4 рис. 3), при этом максимальное значение  $|R_{11}^{12}|$  и определяющее этот максимум значение поля намагничивания  $H_0$  зависит также и от геометрических размеров нанорешетки (диаметра  $2r$  нанопроволок и периода решетки  $a = 3,5r$ ).

Модуль коэффициента прохождения  $|R_{11}^{12}|$  имеет максимальное значение при  $H_0 = 800$  В (для  $2r = 10$  нм), оптимальное значение постоянного поля намагничивания  $H_0$ , реализующее этот максимум, существенно уменьшается при увеличении диаметра  $2r$  магнитных нанопроволок в интервале  $10 \text{ нм} < 2r < 25 \text{ нм}$  (и периода решетки  $a = 3,5r$ ) и становится равным  $H_0 = 75$  В для  $2r = 25$  нм.

Результаты электродинамического расчета модуля коэффициента прохождения  $|R_{11}^{12}|$  ТЕМ-волны через решетки ферромагнитных нанопроволок различного диаметра  $2r$  при намагничивании постоянным полем ( $H_0 \neq 0$ ) по отношению к коэффициенту прохождения  $|\tilde{R}_{11}^{12}|$  через решетки электрических

нанопроволок (при  $H_0 = 0$ ) в зависимости от длины  $l$  нанопроволок на частоте  $f = 30$  ТГц приведены на рис. 4.

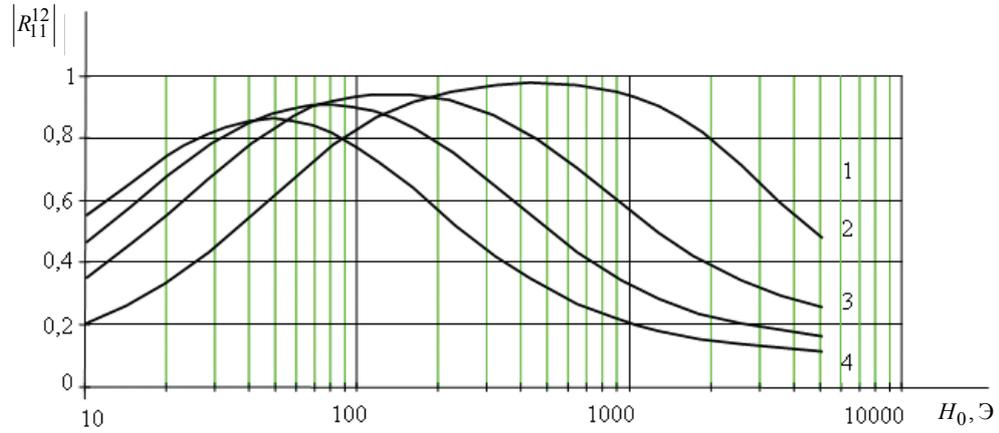


Рис. 3 Модуль коэффициента прохождения  $|R_{11}^{12}|$  ТЕМ-волны через решетку ферромагнитных нанопроволок в зависимости от величины постоянного поля намагничивания  $H_0$  при изменении диаметра нанопроволок  $2r$  и периода решетки  $a$ :  
 $\vec{H}_0 = H_0 \vec{y}_0$ ;  $f = 30$  ТГц;  $a = 3,5r$ ,  $b = 1,25l$ ,  $c = 2r$ ;  $l = 300$  нм;  
 кривые 1 –  $2r = 10$  нм; 2 –  $2r = 15$  нм; 3 –  $2r = 20$  нм; 4 –  $2r = 25$  нм

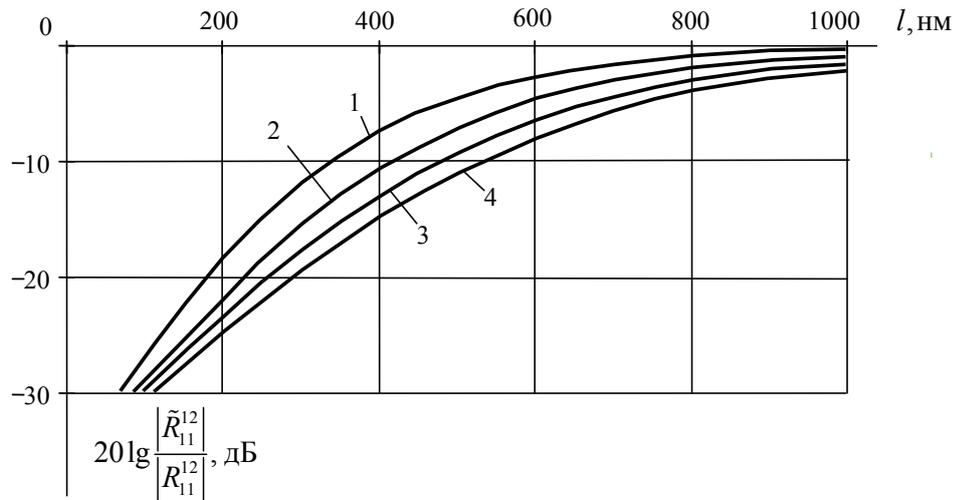


Рис. 4 Зависимости относительного коэффициента прохождения ТЕМ-волны через периодические решетки ферромагнитных нанопроволок от длины  $l$  нанопроволок при намагничивании постоянным полем  $H_0$ :  $|R_{11}^{12}| - H_0 \neq 0$ ;  
 $|\tilde{R}_{11}^{12}| - H_0 = 0$ ;  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{y}_0$ ;  $a = 3,5r$ ,  $b = 1,25l$ ;  $c = 2r$ ;  $f = 30$  ТГц;  
 кривые 1 –  $2r = 10$  нм,  $H_0 = 450$  Э; 2 –  $2r = 15$  нм,  $H_0 = 105$  Э;  
 3 –  $2r = 20$  нм,  $H_0 = 75$  Э; 4 –  $2r = 25$  нм,  $H_0 = 50$  Э

Как следует из результатов математического моделирования (рис. 4), коэффициент прохождения  $|R_{11}^{12}|$  через магнитную нанорешетку при приложении внешнего постоянного магнитного поля  $H_0$  наиболее существенно отличается от коэффициента прохождения  $|\tilde{R}_{11}^{12}|$  через нанорешетку без подмагничивания при малой длине нанопроволок  $l < 350$  нм (и уменьшающейся периодичности  $b = 1,25l$ ) и в меньшей степени зависит от величины постоянного поля намагничивания  $H_0$  для решеток с нанопроволоками различного диаметра  $2r$  (и периода решетки  $a = 3,5r$ ).

На рис. 5 приведены результаты электродинамического расчета модуля коэффициента отражения  $|R_{11}^{11}|$  ТЕМ-волны от двумерных периодических решеток магнитных нанопроволок различного диаметра  $2r$  в зависимости от длины  $l$  нанопроволок при изменении величины постоянного поля намагничивания  $H_0$  на частоте  $f = 30$  ТГц.

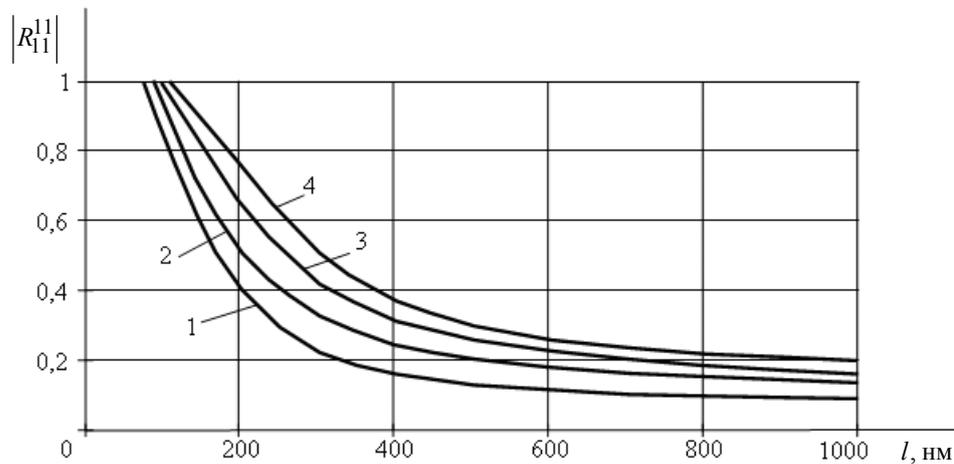


Рис. 5 Модуль коэффициента отражения  $|R_{11}^{11}|$  ТЕМ-волны от магнитных нанорешеток в зависимости от длины нанопроволок  $l$  при изменении величины постоянного поля намагничивания  $H_0$ :  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{y}_0$ ;  $f = 30$  ТГц;  $a = 3,5r$ ,  $b = 1,25l$ ;  $c = 2r$ ; кривые 1 –  $2r = 10$  нм,  $H_0 = 450$  Э; 2 –  $2r = 15$  нм,  $H_0 = 105$  Э; 3 –  $2r = 20$  нм,  $H_0 = 75$  Э; 4 –  $2r = 25$  нм,  $H_0 = 50$  Э

Как следует из результатов математического моделирования, модуль коэффициента отражения  $|R_{11}^{11}|$  плавно стремится к единице (рис. 5) при существенном уменьшении длины нанопроволок  $l < 100$  нм (и уменьшающейся периодичности  $b = 1,25l$ ), т.к. электромагнитная волна почти полностью отражается ( $|R_{11}^{11}| \sim 1$ ) от решетки нанопроволок с высокой плотностью упаковки, как от эффективной «металлической пленки».

Таким образом, максимум коэффициента прохождения  $\left| R_{11}^{12} \right|$  управляется постоянным полем намагничивания  $H_0$  и зависит от геометрии и соотношения размеров магнитной нанорешетки (диаметра  $2r$ , длины нанопроволок и периодичности решетки  $a = 3,5r$ ,  $b = 1,25l$ ).

**Список литературы**

1. **Роко, М. К.** Нанотехнология в ближайшем десятилетии. Прогноз направления исследований / М. К. Роко, Р. С. Уильямс. – М. : Мир, 2002.
2. **Малеев, Н. А.** Сравнительный анализ длинноволновых (1,3 мкм) вертикально-излучающих лазеров на подложках арсенида галлия / Н. А. Малеев, А. Ю. Егоров, А. Е. Жуков [и др.] // ФТП. – 2001. – Т. 35. – С. 881.
3. **Гуревич, А. Г.** Магнитные колебания и волны / А. Г. Гуревич, Г. А. Мелко. – М. : Наука, 1994.
4. **Макеева, Г. С.** Математическое моделирование и электродинамический расчет эффективных параметров магнитных наноматериалов / Г. С. Макеева, О. А. Голованов, М. В. Савченкова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2008. – № 4. – С. 80–85.
5. **Никольский, В. В.** Декомпозиционный подход к задачам электродинамики / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М. : Наука, 1983. – 304 с.
6. **Голованов О. А.** // Радиотехника и электроника. – 1990. – Т. 35. – № 9. – С. 1853.

---

**Макеева Галина Степановна**

доктор физико-математических наук,  
профессор, кафедра радиотехники  
и радиоэлектронных систем,  
Пензенский государственный  
университет,  
действительный член Академии  
инженерных наук им. А. М. Прохорова

**Makeeva Galina Stepanovna**

Doctor of Science (in Radiophysics),  
professor, sub-department  
of Radio – Technics and RES,  
Penza State University,  
Member of the Engineering Sciences  
Academy Named by A. M. Prokhorov

**Голованов Олег Александрович**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
математики и начертательной геометрии,  
Пензенский артиллерийский  
инженерный институт  
им. Н. Н. Воронова

**Golovanov Oleg Alexandrovich**

Doctor of Science (in Radiophysics),  
professor, head of sub-department  
of mathematics and script geometry,  
Penza Artillery-Engineering Institute  
Named by N. N. Voronova

---

УДК 537.874.6

**Макеева, Г. С.**

**Электродинамический расчет параметров матрицы рассеяния периодической решетки ферромагнитных нанопроволок в инфракрасном диапазоне** / Г. С. Макеева, О. А. Голованов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 113–120.

В. М. Журавлев, А. В. Орищенко,  
В. В. Авдонин, С. В. Летуновский

## МОДЕЛИ ЭВОЛЮЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО ЭНЕРГИИ В ПРОСТРАНСТВЕ СКОРОСТЕЙ\*

*Аннотация.* Излагается метод моделирования эволюции функции распределения частиц в пространстве скоростей в нестационарной плазме солнечной вспышки на основе точных решений уравнений Фоккера-Планка. Решение строится с учетом влияния кулоновского торможения и взаимодействия частиц плазмы с ионно-звуковой турбулентностью. Математический метод моделирования основан на приведении уравнения Фоккера-Планка путем замены переменных к уравнению типа Шредингера и использовании метода лестничных операторов для его решения.

*Ключевые слова:* уравнение Фоккера-Планка, диффузия в пространстве скоростей, плазма, солнечная вспышка, ионно-звуковая турбулентность, лестничные операторы.

*Abstract.* We advise to use the precision result of Fokker-Plank equation for describing evolution of particles distribution function in velocity space. In solution we take into account the effects of coulomb deceleration and interaction of particles of plasma with ion-acoustic turbulence. The mathematic model method is based on transforming Fokker-Plank equation to equation like Shredinger equation using some special substitution for variables in Fokker-Plank equation, and based on use ladder operator method to solve it.

*Keywords:* Fokker-Plank equation, diffusion in velocity space, plasma, solar flare, ionacoustic turbulence, ladder operators.

### Введение

В области вспышки на Солнце реализуются процессы, связанные с формированием различных видов турбулентности в плазме и взаимодействием ионов плазмы как с тем или иным видом этой турбулентности, так и с плазменной средой активной области, где формируются вспышечные условия. Примером подобных процессов может служить взаимодействие ионов с развитой ионно-звуковой турбулентностью на фоне кулоновского трения [1]. Процесс взаимодействия может быть описан уравнением диффузии заряженных частиц в конфигурационном пространстве модулей скорости частиц, а кулоновское трение – результат взаимодействия частиц с фоном зарядов тепловых протонов плазмы.

### 1 Уравнение для эволюции распределения частиц по скоростям в плазме

Уравнение для эволюции распределения  $f(V, t)$  частиц по модулю скоростей  $V$  может быть представлено в следующем виде [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial V} \left[ V^2 \left( D \frac{\partial f}{\partial t} + F(V) f \right) \right]. \quad (1)$$

\* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 08-01-97013-р\_поволжье\_а.

Это уравнение типа уравнения Фокера-Планка. Здесь  $F(V)$  – функция, описывающая торможение ионов в плазме за счет кулоновского взаимодействия. Для достаточно малых скоростей  $F(V) = -\alpha \cdot V$ , где  $\alpha$  – постоянная.

## 2 Решение

Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{\partial^2}{\partial V^2} (DVf) - \frac{\alpha}{V^2} \frac{\partial (V^3 f)}{\partial V}. \quad (2)$$

Введем функцию  $h(V, t) = V \cdot f(V, t)$ , имеющую вид (по размерности) плотности числа частиц в обычном пространстве. Тогда уравнение для этой функции можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D \frac{\partial^2 h}{\partial V^2} - \alpha V \frac{\partial h}{\partial V} - 2\alpha h. \quad (3)$$

Полученное уравнение решаем методом разделения переменных. Для этого функцию представим в виде произведения –  $h(V, t) = \Psi(V) \cdot T(t)$  и подставим в уравнение (3), которое поделим на произведение функций  $\Psi(V) \cdot T(t)$ . Получим

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\Psi} \left\{ D \frac{d^2 \Psi}{dV^2} - \alpha V \frac{d\Psi}{dV} - 2\alpha \Psi \right\}. \quad (4)$$

Левая часть выражения (4) зависит только от времени, а правая – от скорости. Поэтому равенство (4) выполняется, только если обе части выражения равны неопределенной константе, которую обозначим  $(-\gamma)$ . Тогда (4) распадается на два уравнения:

$$\begin{cases} \dot{T} + \gamma T = 0, \\ \Psi'' - \frac{\alpha V}{D} \Psi' + \left( \frac{\gamma}{D} - \frac{2\alpha}{D} \right) \Psi = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где точкой обозначена операция дифференцирования по времени, а штрихом – по скорости.

Решение первого уравнения системы (5) имеет вид  $T(t) = e^{-\gamma t}$ , во втором сделаем замену переменной по формуле  $u = \sqrt{\frac{\alpha}{2D}} V$ . Тогда оно переписывается в виде

$$\frac{d^2 \Psi}{du^2} - 2u \frac{d\Psi}{du} + \left( \frac{2\gamma}{\alpha} - 4 \right) \Psi = 0. \quad (6)$$

Это уравнение Эрмита [2]. Его решением являются нормированные полиномы Эрмита  $\Psi(u) = H_n(u)$ , а величина в круглых скобках (6) является

собственным значением уравнения (6), для которого выполняется равенство  $\frac{2\gamma}{\alpha} - 4 = 2n, n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ , откуда

$$\gamma_n = \alpha (n + 2). \quad (7)$$

То есть частное решение уравнения (3) имеет следующий вид:

$$h_n(V, t) = H_n \left( \sqrt{\frac{\alpha}{2D}} V \right) \cdot e^{-\alpha (n+2) t},$$

а его общее решение есть линейная комбинация частных решений:

$$h(V, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot H_n \left( \sqrt{\frac{\alpha}{2D}} V \right) \cdot e^{-\alpha (n+2) t}. \quad (8)$$

Тогда решение уравнения (1) запишется в виде

$$f(V, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \frac{H_n \left( \sqrt{\frac{\alpha}{2D}} V \right)}{V} \cdot e^{-\alpha (n+2) t}. \quad (9)$$

Амплитуды  $A_n$  находятся из начального и граничных условий. Начальное распределение частиц по скоростям можно считать максвелловским, а в качестве граничных условий выбрать условия вида  $\lim_{V \rightarrow \infty} f(V, t) = 0$  и  $f(0, t) = 0$ . Из последнего равенства следует, что все четные амплитуды  $A_{2k} = 0, k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ .

Окончательно для функции  $f$  получаем

$$f(V, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \cdot \frac{H_{2k+1} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{2D}} V \right)}{V} \cdot e^{-\alpha (2k+3) t}. \quad (10)$$

### 3 Обсуждение результатов

Вычислим амплитуды  $A_{2k+1}$ . Начальное распределение частиц описывается функцией Максвелла [3]:

$$f(V, 0) = \varphi(V) = 4\pi V^2 \cdot \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m V^2}{2k_B T}}. \quad (11)$$

Подставляя в (10) значение  $t = 0$  и сравнивая с (11), получим

$$f(V, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \cdot \frac{H_{2k+1} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{2D}} V \right)}{V} = \varphi(V). \quad (12)$$

Фактически формула (12) есть разложение функции распределения Максвелла по модулю скорости в ряд по полиномам Эрмита. Умножим (12) на  $H_{2m+1}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2D}}V\right) \cdot V \cdot e^{-\frac{\alpha V^2}{2D}}$  и проинтегрируем ее по  $dV$  в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ , учитывая свойство ортогональности полиномов Эрмита:

$$\begin{aligned} A_{2k+1} \cdot \left\| H_{2k+1}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2D}}V\right) \right\|^2 \sqrt{\frac{2D}{\alpha}} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(V) \cdot H_{2k+1}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2D}}V\right) \cdot V \cdot e^{-\frac{\alpha V^2}{2D}} dV. \end{aligned} \quad (13)$$

Квадрат нормы полиномов Эрмита  $\|H_n\|^2 = 2^n \sqrt{\pi} n!$  [2], поэтому коэффициенты разложения определяются как

$$A_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1} (2k+1)! \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha}{2D}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(V) \cdot H_{2k+1}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2D}}V\right) \cdot V \cdot e^{-\frac{\alpha V^2}{2D}} dV. \quad (14)$$

Обозначим квадратный корень в аргументе функции Эрмита через  $\sqrt{\frac{\alpha}{2D}} = \frac{1}{V_\vartheta}$ . Тогда по смыслу величина  $V_\vartheta = \sqrt{\frac{2D}{\alpha}}$  представляет собой характерную скорость, которую приобретают частицы в рассматриваемом механизме ускорения с учетом кулоновских взаимодействий. Введем также величину  $\eta = \frac{mV_\vartheta^2}{2 k_B T} = \frac{mD}{\alpha k_B T}$ , характеризующую относительную энергию частиц плазмы, взаимодействующих с турбулентностью. Выразим через эти величины несколько первых амплитуд разложения (10), рассчитанных по

формуле (14):  $A_1 = \frac{3\eta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}(\eta+1)^{\frac{5}{2}}}$ ,  $\frac{A_3}{A_1} = \frac{1}{12} \frac{\eta-2}{\eta+2}$ ,  $\frac{A_5}{A_3} = \frac{\eta(3\eta-4)}{8(\eta+1)(3\eta-2)}$ ,  
 $\frac{A_7}{A_5} = \frac{\eta(\eta-2)}{4(\eta+1)(3\eta-4)}$  и т.д.

Видно, что амплитуды  $A_{2k+1}$ , вычисленные при различных значениях  $k$ , убывают по модулю с ростом  $k$ . При  $t=0$  ряд (10) с коэффициентами (14) сходится к распределению Максвелла. С течением времени множитель, стоящий перед функцией Эрмита, будет уменьшаться по экспоненте, и, следовательно, полученное решение нашего уравнения в виде ряда также останется сходящимся.

#### 4 Дополнение. Квантовая аналогия

Если разделить переменных в уравнении (3) производить по формуле  $h = T(t) \cdot \Omega(V) e^{\alpha V^2/4D}$ , то функция  $\Omega(V)$  будет удовлетворять уравнению,

вид которого формально аналогичен виду уравнения на собственные значения квантового гармонического осциллятора [3] за тем исключением, что штрихи в этих уравнениях имеют совершенно различный смысл:

$$\Omega'' - \frac{\alpha^2}{4D^2} V^2 \Omega = \left( -\frac{\gamma}{D} + \frac{3\alpha}{2D} \right) \Omega. \quad (15)$$

В формуле (15) штрихи обозначают производные по модулю скорости в конфигурационном пространстве, а в уравнении Шредингера – это производные по пространственной координате в обычном пространстве.

Для того чтобы уравнение (15) в точности формально перешло по виду в уравнение Шредингера для квантового гармонического осциллятора, достаточно формально положить  $D \Rightarrow \hbar / \sqrt{2m}$ ,  $\alpha^2 \Rightarrow 2\omega^2 m$ ,  $E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \Rightarrow \frac{D(2\gamma - 3\alpha)}{2}$ , «забыв» о различии смысла штрихов. В таком случае мы также приходим к полученному условию квантования (7).

### Список литературы

1. **Орищенко, А. В.** Формирование солнечных космических лучей, обогащенных тяжелыми ионами / А. В. Орищенко // Космос: наука и образование – 2005 : тезисы докладов школы-семинара. – Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2005. – С. 26–29.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган ; пер. с англ. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
3. **Пул, Ч.** Справочное руководство по физике. Фундаментальные концепции, основные уравнения и формулы : пер. с англ. / Ч. Пул. – М. : Мир, 2001. – 462 с.

#### **Журавлев Виктор Михайлович**

доктор физико-математических наук,  
профессор, кафедра теоретической  
физики, Ульяновский  
государственный университет

#### **Zhuravlev Viktor Mikhailovich**

Doctor of Science (in Physics), professor,  
sub-department of theoretical physics,  
Ulyanovsk State University

#### **Орищенко Алексей Васильевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра физики,  
Ульяновский государственный  
университет (филиал в г. Димитровград)

#### **Orishchenko Alexey Vasilyevich**

PhD in Physics, associate professor,  
sub-department of physics,  
Ulyanovsk State University  
(Dimitrovgrad sub-department)

#### **Летуновский Сергей Владимирович**

аспирант,  
Ульяновский государственный  
университет (филиал в г. Димитровград)

#### **Letunovskiy Sergey Vladimirovich**

post-graduate student,  
Ulyanovsk State University  
(Dimitrovgrad sub-department)

**Авдонин Василий Вячеславович**

младший научный сотрудник,  
ОАО Государственный научный центр  
Научно-исследовательский институт  
атомных реакторов (г. Димитровград)

**Avdonin Vasily Vyacheslavovich**

junior scientific researcher,  
Joint Stock Company "State Scientific  
Center Research Institute of Atomic  
Reactors" (Dimitrovgrad)

---

УДК 533.933; 533.932

**Журавлев, В. М.**

**Модели эволюции распределения частиц по энергии в пространстве скоростей** / В. М. Журавлев, А. В. Орищенко, В. В. Авдонин, С. В. Летуновский // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 121–126.

В. Г. Полосин, С. В. Тертычная

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ОБЪЕМНОЙ АКТИВНОСТИ РАДОНА С ПОМОЩЬЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА-ГНЕДЕНКО

*Аннотация.* Рассмотрена возможность описания результатов измерения объемной активности радона с помощью смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко, позволяющего выявить природу, характер источника эксхалации радона и оценить верхнее возможное значение объемной активности радона на исследованной территории. Дан сравнительный анализ применения трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко и логарифмического нормального распределения на основе информационных свойств статистических распределений с использованием топографической классификации.

*Ключевые слова:* идентификация несимметричных распределений, энтропийный коэффициент, контрэкссесс, объемная активность радона, топографическая классификация симметричных распределений, распределение Вейбулла-Гнеденко, логарифмически нормальное распределение.

*Abstract.* This article considers the possibility of the description which shows the results of measurement of radon volume activity by means of the displaced three-parametrical distribution Weibull-Gnedenko, allowing to reveal the nature, the character of a source radon exhalation and to estimate the top possible value of radon on the investigated territory. The comparative analysis of application of the three-parametrical distribution Weibull-Gnedenko and the logarithmic normal distribution on the basis of the information properties of the static distributions with the use of a topographical classification is given.

*Keywords:* identification of nonsymmetric distributions, entropy coefficient, antikurtosis, volumetric (mass) activity of radon, topographical classification of symmetrical distributions, distribution Weibull-Gnedenko, logarithmic normal distribution.

### Введение

В литературе при анализе результатов радоновых обследований традиционно принято использовать свойства логнормального распределения [1, 2]. Возможности аппроксимации результатов измерений объемной активности (ОА) радона на территории г. Пензы и их анализ с помощью логарифмически нормального распределения были рассмотрены авторами в ранее опубликованной работе [3]. Существование мощного локального источника на исследуемой территории приводит к смещению регистрируемых значения ОА радона в область больших значений. В этом случае в качестве сглаживающего распределения наиболее применимо смещенное трехпараметрическое распределение Вейбулла-Гнеденко.

В современной литературе распределение Вейбулла-Гнеденко нашло широкое применение, в связи с его универсальностью [4, 5]. Целый ряд распределений является, по сути, частным случаем распределения Вейбулла-Гнеденко, функция которого имеет вид

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left|\frac{x - x_0}{a}\right|^c\right), \quad (1)$$

где  $a$  – параметр масштаба;  $c$  – параметр формы;  $x_0$  – смещение.

При значениях  $c > 2$  и  $x_0 = 0$  распределение Вейбулла-Гнеденко позволяет аппроксимировать логарифмически нормальное распределение и служит достаточно хорошим приближением для ряда других законов, используемых в различных моделях прикладной математической статистики [6]. Если  $c > 5$ , то такое распределение хорошо аппроксимирует нормальное распределение. При параметре  $c = 2$  распределение Вейбулла-Гнеденко совпадает с распределением Рэлея. Значение параметра формы  $c = 1$  превращает выражение (1) в показательное распределение.

В статье рассмотрена возможность описания результатов измерения ОА радона с помощью смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко, позволяющих выявить природу и характер источника эксхалляции. В связи с тем, что оценка параметров распределения очень сильно зависит от метода оценки его параметров, появляется необходимость последующей идентификации соответствия полученной реализации сглаживающей функции исходной выборке значений.

В современной практике идентификации симметричных распределений широкое применение находит метод, связанный с определением двух параметров: контрэксцесса  $\chi$  и энтропийного коэффициента  $k$  [5], позволяющих учитывать количество информации, содержащейся в распределении.

### **1 Информационный метод идентификации статистических распределений**

Авторами работы рассматривается возможность идентификации асимметричного распределения Вейбулла-Гнеденко, состоящая в преобразовании распределения к симметричному двустороннему распределению Лапласа и использовании топографической диаграммы, которая построена в осях энтропийного коэффициента  $k_3$  и контрэксцесса  $\chi$  для симметричных распределений. Области оценок  $\chi$  и  $k_3$  принятия гипотезы нормального и показательного экспоненциального распределений, показаны на рис. 1 в виде заштрихованных областей  $A$  и  $B$  соответственно. Цифрами 1 и 2 обозначены местоположения соответствующих распределений. Положения оценок  $\chi$  и  $k_3$ , рассчитанных для реализации сглаживающих логарифмически нормальных распределений, изображены на рис. 1 с помощью точек, где параметры самого распределения получены следующими методами:  $a$  – методом моментов с использованием среднего значения и дисперсии;  $b$  – методом максимального правдоподобия;  $c$  – методом основанном на выборочных квантилях;  $d$  – методом моментов с использованием среднего значения и медианы;  $e$  – методом моментов с использованием эксцесса;  $k$  – методом, основанном на выборочных квантилях;  $m$  – методом максимального правдоподобия.

При идентификации логарифмического нормального распределения статистическая выборка подвергалась преобразованию вида

$$z = \ln x, \quad (2)$$

что позволило свести данные к центрированному нормальному распределению величины  $z$ , для которого на топографической диаграмме распределений соответствует точка 1 с известными значениями контрэксцесса  $\chi$  и энтропийного коэффициента  $k$ , равными соответственно 0,577 и 2,066.

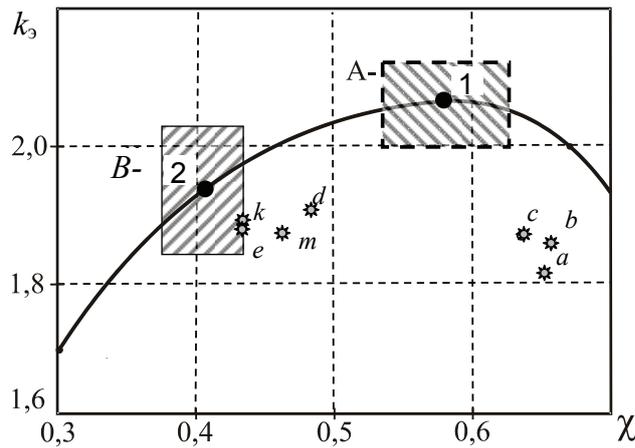


Рис. 1 Топографическая диаграмма распределений

Разброс  $\Delta_\chi$  и  $\Delta_k$  оценок  $\chi$  и  $k$  зависит от выбора доверительной вероятности оценки и от количества  $n$  измерений в выборке. Для расчета разброса оценок при доверительной вероятности  $p = 0,9$  в работе использовались формулы вида [7]:

$$\Delta_{0,9}(\chi) = 1,6\chi \frac{\sqrt[4]{(\varepsilon^2 - 1)^3}}{\sqrt{29n}},$$

$$\Delta_{0,9}(k) = 1,44 / (\chi k \sqrt{kn}), \tag{3}$$

где  $\varepsilon$  – эксцесс распределения.

Интервалы неопределенности  $\Delta_\chi$  и  $\Delta_k$  нормального распределения, эксцесс которого равен 1,733, рассчитанные для зимнего периода наблюдений из выражений (3), соответственно равны 0,04 и 0,07.

Возможность использования подобного подхода для идентификации смещенного распределения Вейбулла-Гнеденко связана с преобразованием выборки результатов в соответствии с выражением

$$y = - \left| \frac{x - \bar{x}}{a} \right|^c \tag{4}$$

к показательному (экспоненциальному) распределению вида

$$F(y) = 1 - e^{-\lambda y}.$$

Здесь  $\lambda$  – параметр масштаба. Для показательного распределения  $\lambda = 1$ .

В результате симметричного отражения положительных значений результатов  $y_i$  относительно нулевого значения величины ( $y_0 = 0$ ) выборка преобразуется к симметричному двухстороннему показательному распределению Лапласа, вида

$$F(z) = \begin{cases} 1 - 0,5e^{-\lambda z} & | z \geq 0, \\ 0,5e^{-\lambda z} & | z \leq 0. \end{cases}$$

На топографической диаграмме, показанной на рис. 1, распределению Лапласа отвечает точка 2, для которой значение контрэксцесса  $\chi$  и энтропийного коэффициента  $k$  соответственно равны 0,408 и 1,92. Следовательно, если преобразованная в соответствии с выражением (4) выборка результатов после симметричного отражения данных относительно нулевого значения соответствует распределению Лапласа, то исходная выборка результатов измерения радона  $x_i$  будет соответствовать смещенному распределению Вейбулла-Гнеденко. Интервалы неопределенности  $\Delta_\chi$  и  $\Delta_k$  для оценки распределения Лапласа с эксцессом  $\epsilon$  равным 2,45, рассчитанные согласно выражению (3), равны 0,03 и 0,1 соответственно.

## **2 Результаты статистического анализа распределения**

Параметры сглаживающего распределения при аппроксимации выборки достаточно сильно зависят от метода оценки параметров распределения. Поэтому при проведении анализа для каждого распределения рассматривались несколько возможных реализаций, отличающихся методами оценки параметров распределений. Для логарифмического нормального распределения параметр масштаба  $m$  и параметр формы  $a$  оценивались тремя различными методами [8]:

- 1) моментов с использованием среднего значения и дисперсии;
- 2) максимального правдоподобия;
- 3) оценки, основанной на выборочных квантилях.

Параметры формы  $s$ , масштаба  $a$  и смещения (сдвига)  $x_0$  смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко оценены также с помощью нескольких методов [9]:

- 1) моментов, основанном на разности среднего значения и медианы;
- 2) моментов, основанном на коэффициенте эксцесса;
- 3) оценки параметров, основанном на выборочных квантилях;
- 4) максимального правдоподобия.

Сопоставляя оценки контрэксцесса  $\chi$  и энтропийного коэффициента  $k$  с допустимыми интервалами можно сделать следующие выводы по распределению. Все совместные оценки контрэксцесса  $\chi$  и энтропийного коэффициента  $k$ , полученные при аппроксимации данных с помощью логарифмического нормального распределения, находятся на значительном удалении от выделенной на рис. 1 для точки 1 области значений  $A$  с доверительной вероятностью 0,9, что обусловлено низкими значениями энтропийного коэффициента выборки, после ее преобразования в соответствии с выражением (2). Полученные результаты указывают на малую вероятность гипотезы выбора логнормального распределения в качестве сглаживающего для выборок измерения ОА радона в летний период. При этом наиболее удачный результат получен методом оценки параметров распределения, основанным на выборочных квантилях. Этой реализации логнормального распределения на топографической диаграмме рис. 1 соответствует точка  $c$ .

Для смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко все значения энтропийных коэффициентов  $k$  попадают в интервал значений  $[1,82; 2,02]$ , ограничивающий для точки 2 (рис. 1) области значений с доверительной вероятностью 0,9; значения контрэксцесса  $\chi$  находятся на

границе выделенной области или в непосредственной близости от нее. Полученный результат позволяет утверждать, что из всех рассматриваемых в работе распределений наиболее вероятна гипотеза для выборок измерения ОА радона в качестве сглаживающего распределения смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко. Причем из четырех полученных реализаций сглаживающего трехпараметрического распределения следует выделить вторую и третью (на топографической диаграмме обозначены буквами  $k$  и  $e$  соответственно), параметры которых оценивались методом моментов с использованием эксцесса и методом выборочных квантилей. Для этих реализаций при доверительной вероятности 0,9 совместные оценки контрэксцесса  $\chi$  и энтропийного коэффициента  $k$  расположены на границе выделенной области значений точки 2 топографической диаграммы.

На рис. 2 дана гистограмма плотностей частот распределения для результатов измерения ОА радона летнего периода измерений и типичные реализации сглаживающих логнормального распределения, для которых оценки параметров реализации получены следующими методами: 1 – методом моментов; 2 – методом максимального правдоподобия; 3 – методом, основанном на выборочных квантилях.

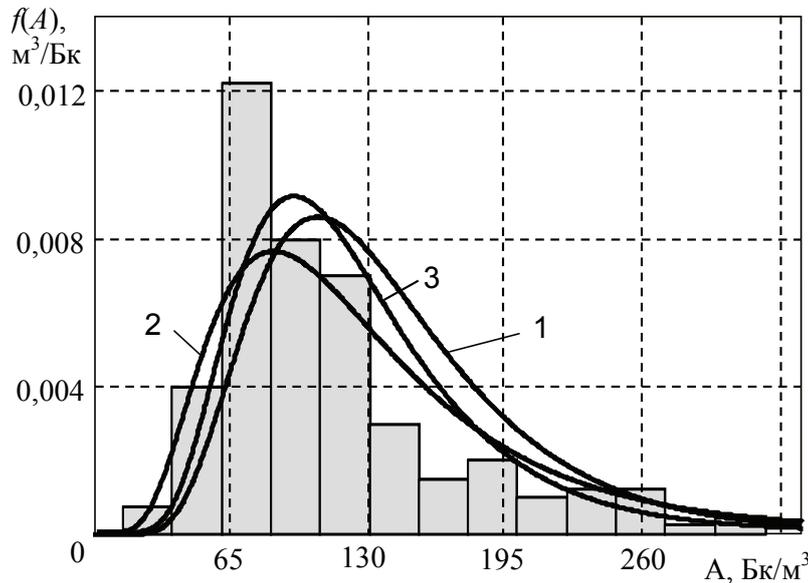


Рис. 2 Гистограмма плотностей частот распределения ОА радона и сглаживающие реализации логарифмического нормального распределения

На рис. 3 дана гистограмма плотностей частот распределения для результатов измерения ОА радона летнего периода и типичные сглаживающие реализации смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко. Оценка параметров реализации распределения проведена следующими методами: 1 – методом, основанном на разности среднего значения и медианы; 2 – методом, основанном на коэффициенте эксцесса; 3 – методом оценки параметров, основанном на выборочных квантилях; 4 – методом максимального правдоподобия. Нумерация распределений, применяемая на рис. 2, 3, соответствует нумерации реализаций, используемой в табл. 1.

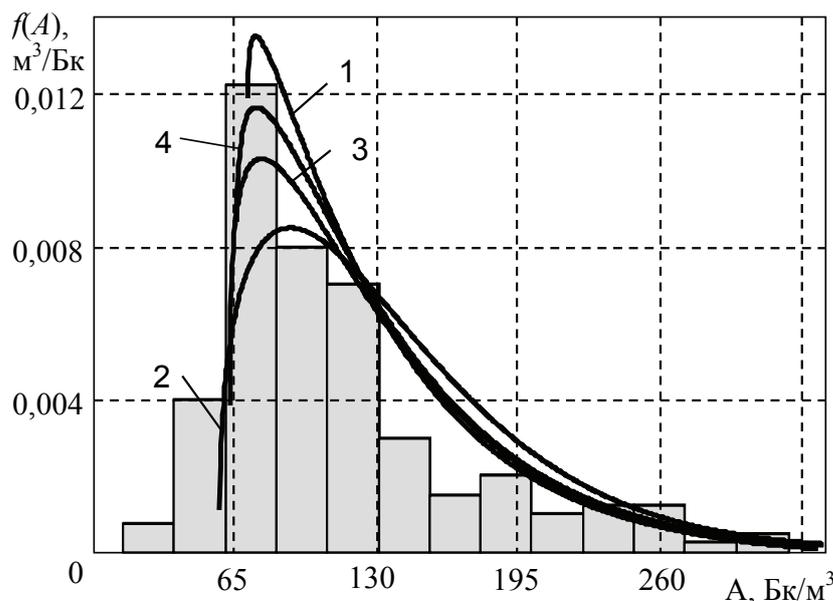


Рис. 3 Гистограмма плотностей частот распределения ОА радона и сглаживающие реализации смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко

Таблица 1

Оценки контрэксцесса и энтропийного коэффициента выборки ОА радона для используемых типов несимметричных сглаживающих распределений

| Тип несимметричного сглаживающего распределения | Летний период  |        |       |
|---|--|--------|-------|
|   | Коэффициенты распределения   | $\chi$ | $k$   |
| Логарифмическое нормальное                      | 1. $m = 118,8 \text{ Бк/м}^3; a = 0,428$                               | 0,649  | 1,806 |
|   | 2. $m = 122,4 \text{ Бк/м}^3; a = 0,4$                                 | 0,655  | 1,811 |
|   | 3. $m = 112,5 \text{ Бк/м}^3; a = 0,423$                               | 0,637  | 1,867 |
| Смещенное трехпараметрическое Вейбулла-Гнеденко | 1. $c = 1,052; a = 62,52 \text{ Бк/м}^3; x_0 = 68,88 \text{ Бк/м}^3$   | 0,484  | 1,915 |
|   | 2. $c = 1,356; a = 85,36 \text{ Бк/м}^3; x_0 = 51,95 \text{ Бк/м}^3$   | 0,443  | 1,865 |
|   | 3. $c = 1,295; a = 81,044 \text{ Бк/м}^3; x_0 = 55,258 \text{ Бк/м}^3$ | 0,441  | 1,879 |
|   | 4. $c = 1,234; a = 76,581 \text{ Бк/м}^3; x_0 = 57,36 \text{ Бк/м}^3$  | 0,461  | 1,88  |

### Заключение

Таким образом, из проведенной идентификации распределений следует, что в качестве сглаживающего распределения следует принять вторую или третью реализацию смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко, имеющие близкие значения контрэксцесса. Использование этого распределения в качестве сглаживающего указывает на существование в летний период сравнительно большого источника ОА радона, расположенного на исследуемой территории г. Пензы. Усреднение параметра смещения для различных реализаций распределения Вейбулла-Гнеденко позволяет также оценить верхнее возможное значение объемной активности источника. Авторы статьи полагают, что таким источником может быть существующий на территории г. Пензы геологический разлом.

## Список литературы

1. **Микляев, П. С.** Закономерности миграции и эксхалляции радона из грунтов на территории г. Москвы : дис. ... канд. геолого-минералог. наук / П. С. Микляев. – М., 2002. – 170 с.
2. **Ярмошенко, И. В.** Использование свойств логнормального распределения при анализе результатов радоновых обследований / И. В. Ярмошенко, М. В. Жуковский, И. А. Кирдин // Актуальные проблемы ограничения облучения населения от природных источников ионизирующего излучения. Радон – 2000 : материалы научно-практической конференции (18–20 апреля 2000 г.) – М., 2000. – С. 17–20.
3. **Тертычная, С. В.** Методика наблюдения за миграцией радона в населенных пунктах / С. В. Тертычная, В. Г. Полосин // Современные технологии безопасности. – 2006. – № 3–4 (18–19). – С. 24–26.
4. **Лемешко, Б. Ю.** Статистическое моделирование как эффективный инструмент для исследования закона распределения функций случайных величин / Б. Ю. Лемешко, Д. В. Огурцов // Метрология. – 2007. – № 5. – С. 3–13.
5. **Петрович, М. Л.** Статистическое оценивание и проверка гипотез на ЭВМ / М. Л. Петрович, М. И. Давидович. – М. : Финансы и статистика, 1989. – 192 с.
6. **Вадзинский, Р. Н.** Справочник по вероятностным распределениям / Р. Н. Вадзинский. – СПб. : Наука, 2001. – 296 с.
7. **Новицкий, П. В.** Оценка погрешностей результатов измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. – Л. : Энергоатомиздат, 1985. – С. 175–177.
8. ГОСТ 11. 009–73. Прикладная статистика: Правила определения оценок и доверительных границ для параметров логарифмического нормального распределения. – М. : Изд-во стандартов, 1980.
9. ГОСТ 11. 007–74. Прикладная статистика: Правила определения оценок и доверительных границ для параметров распределения Вейбулла. – М. : Изд-во стандартов, 1980.

**Полосин Виталий Германович**

кандидат технических наук, доцент,  
кафедра физики,  
Пензенский государственный  
университет

**Polosin Vitaliy Germanovich**

PhD in technical science,  
associate professor, sub-department  
of physics, Penza State University

**Тертычная Светлана Вячеславовна**

ассистент, кафедра физики  
Пензенский государственный  
университет

**Tertychnaya Svetlana Vyacheslavovna**

Assistant professor, sub-department  
of physics, Penza State University

УДК 519.24:546.296

**Полосин, В. Г.**

**Анализ результатов измерений объемной активности радона с помощью распределения Вейбулла-Гнеденко** / В. Г. Полосин, С. В. Тертычная // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 127–133.

## СИНГУЛЯРНО-СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

*Аннотация.* Рассматривается методика сингулярно-спектрального анализа и ее применение к измерению автокорреляционных функций неэквилистантных временных рядов. Показывается значительное улучшение точности оценки корреляционных функций неэквилистантных временных рядов на основе результатов имитационного моделирования.

*Ключевые слова:* неэквилистантные временные ряды, случайные процессы, автокорреляционная функция, сингулярно-спектральный анализ.

*Abstract.* Application of singular spectrum analysis to autocorrelations of unevenly spaced time series is considered. A significant improvement of autocorrelation estimation is shown by imitation modeling.

*Keywords:* unevenly spaced time series, stochastic processes, autocorrelation, singular spectrum analysis.

В то время как большинство существующих методик и алгоритмов корреляционно-спектрального анализа разработаны для регулярных временных рядов, все больший интерес представляют алгоритмы анализа неэквилистантных временных рядов (НВР). НВР в общем случае представляет собой временной ряд, для которого время  $t_i$  получения каждого отсчета  $x_i$  не может быть однозначно определено его порядковым номером. Несмотря на то, что классификация НВР насчитывает большое количество разновидностей, метод измерения автокорреляционной функции (АКФ) временного ряда с применением интервальной автокорреляционной функции [1] позволяет получать оценки для любого временного ряда вне зависимости от распределения его отсчетов во времени. При таком подходе корреляционная функция определяется из выражения

$$\widehat{K}_x(J) = \frac{\sum_{i=1}^M \dot{x}_i \sum_{s=0}^L \dot{x}_{i+s} \delta_{i+s}^*}{\sum_{i=1}^M \sum_{s=0}^L \delta_{i+s}^*}, \quad (1)$$

где индикатор состояния  $\delta_{i+s}^*$  определяется как

$$\delta_{i+s}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{i+s} \leq t_i + J\Delta t < t_{i+s+1}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Было показано, что при измерении АКФ НВР статистические погрешности, имеющие место при вычислении КФ регулярных временных рядов, увеличиваются за счет наличия неэквилистантности временных отсчетов [1].

Одним из способов уменьшения такой погрешности является аппроксимация КФ с применением ортогональных функций различных базисов, ко-

торая успешно зарекомендовала себя при исследованиях широкого ряда случайных процессов [2].

В данной статье рассматривается альтернативный подход к представлению КФ случайных процессов, основанный на применении сингулярного спектрального анализа.

### Сингулярно-спектральный анализ

Датой рождения сингулярно-спектрального анализа (ССА) считается 1986 г., когда была опубликована статья [3]. В настоящее время ССА активно исследуется несколькими научными группами в России (где он также известен как метод «Гусеница») [4] и за рубежом [5, 6]. Являясь разновидностью метода анализа главных компонент, метод ССА позволяет разложить временной ряд на группы составляющих, а затем, специальным образом объединив их, получить временной ряд, избавленный от недетерминированной составляющей. При этом важным отличием данного метода от классического метода наименьших квадратов является отсутствие требования нормальности случайной составляющей.

Для действительного временного ряда  $(f_0, \dots, f_{N-1})$  длины  $N$  выполняется операция вложения, приводящая к траекторной матрице

$$X = \begin{pmatrix} f_0 & \cdots & f_{K-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & \cdots & f_{N-1} \end{pmatrix},$$

где  $L$  – длина окна,  $1 < L < N$ , а  $K = N - L + 1$ . Затем выполняется сингулярное разложение матрицы  $X$ :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_d, \quad X_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T,$$

где  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0$  – упорядоченные ненулевые собственные числа ковариационной матрицы, сформированной на основе «траекторной» матрицы, характеризующие вклад каждого собственного вектора в общую дисперсию временного ряда. После оценки собственных значений и векторов выполняются операции группировки и восстановления, приводящие, в частности, к выделению неслучайной составляющей временного ряда.

Нетрудно видеть, что вышеописанную методику можно без дополнительных действий обобщить на случай любой последовательности значений с регулярной дискретизацией. К таким последовательностям можно отнести и набор точек корреляционной функции, вычисленных с регулярным интервалом.

Важной для целей анализа КФ особенностью сингулярно-спектрального разложения является то, что в результате корреляционного анализа сингулярного разложения естественным образом выделяются, в частности, полиномиальные, экспоненциальные, гармонические, а также экспоненциально-гармонические составляющие вида

$$f_n = A e^{\alpha n} \cos(2\pi \omega n + \varphi).$$

### Анализ корреляционной функции методом ССА

В рамках исследования применения метода сингулярно-спектрального анализа для анализа корреляционных НВР был проведен ряд экспериментов по моделированию НВР и анализу их КФ. Каждый эксперимент проводился по следующей схеме:

1. Моделировались отсчеты регулярного временного ряда  $x_i$  с корреляционной функцией  $K_x(\tau)$  заданного вида.
2. По полученным значениям регулярного ряда строилась оценка КФ  $\widehat{K}_x(j)$ .
3. Выполнялось  $p$ -преобразование временного ряда  $x_i \rightarrow \tilde{x}_i$ : такое преобразование временного ряда, при котором для каждого из значений исходного временного ряда с вероятностью  $q = 1 - p$  принимается решение об исключении отсчета их ВР. Полученный в результате такого преобразования ряд является неэквидистантным.
4. Производилась оценка КФ  $\widehat{K}_{\tilde{x}}(j)$  временного ряда, полученного на предыдущем шаге.
5. Выполнялось сингулярно-спектральное разложение функции  $\widehat{K}_{\tilde{x}}(j)$  с последующим восстановлением по первым двум собственным векторам в функцию  $\check{K}_{\tilde{x}}(j)$ .
6. Вычислялось среднеквадратическое отклонение  $\bar{e}$  отсчетов функции  $\widehat{K}_{\tilde{x}}(j)$  от теоретической КФ  $K_x(\tau)$ .
7. Вычислялось среднеквадратическое отклонение  $\check{e}$  отсчетов восстановленной КФ  $\check{K}_{\tilde{x}}(j)$  от теоретической КФ  $K_x(\tau)$ .
8. Вычислялось отношение  $g = \bar{e} / \check{e}$ , показывающее уменьшение погрешности оценки КФ при применении операции восстановления.

Корреляционные функции, полученные в рамках одного из таких экспериментов, показаны на рис. 1.

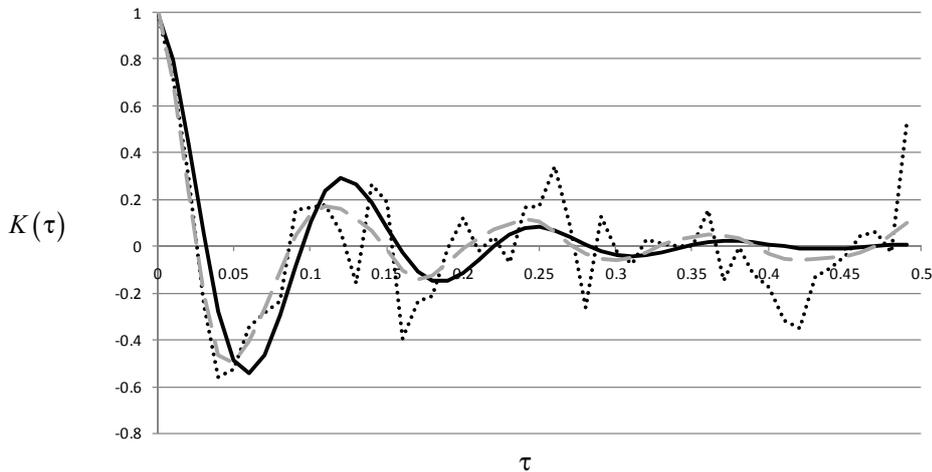


Рис. 1 Корреляционная функция случайного процесса: черная линия – теоретическая функция  $K(\tau) = e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau$ ; черная пунктирная линия – оценка  $\widehat{K}_x(j)$  КФ НВР; серая линия – восстановленная КФ  $\check{K}_{\tilde{x}}(j)$

В результате выполнения 30 серий из 50 экспериментов для каждого из значений  $p = 0,1; 0,2; \dots; 0,9$ , была получена зависимость коэффициента  $g$  от  $p$ , представленная на рис. 2. При этом для генерации 1000 отсчетов ВР была использована экспоненциально-косинусная КФ. Вычисление оценки КФ, ее восстановление и вычисление погрешности выполнялось по первым 50 отсчетам КФ (рис. 1).

Эксперименты с КФ экспоненциального вида с различными наборами параметров привели к схожим результатам и подтвердили общую тенденцию: с увеличением «неэквидистантности» временного ряда восстановленная по сингулярно-спектральному разложению корреляционная функция дает все большее уменьшение погрешности вычисления КФ НВР.

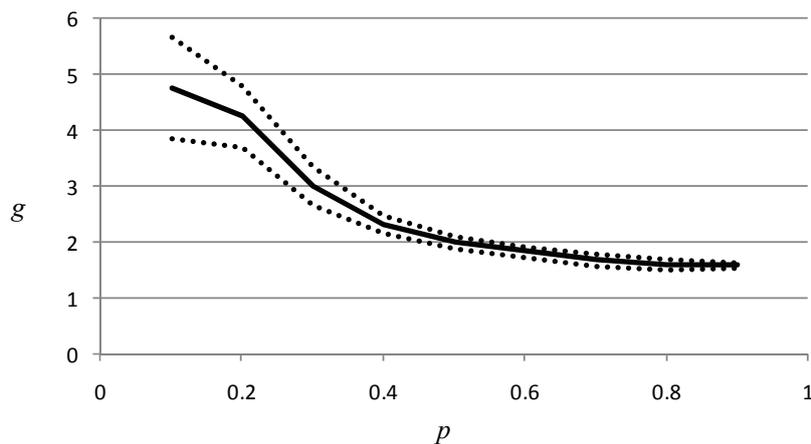


Рис. 2 Зависимость коэффициента  $g$  от параметра  $p$ -преобразования: сплошной линией показано среднее значение  $g$ ; пунктирными линиями обозначены границы среднеквадратичного отклонения

### Заключение

Рассмотренная техника применения сингулярно-спектрального разложения позволяет добиться сокращения в несколько раз погрешности вычисления корреляционных функций неэквидистантных временных рядов. При этом погрешность вычисления значительно сокращается с увеличением разброса значений во времени. Кроме того, применение ССА не требует каких-либо априорных предположений о виде анализируемой последовательности, а следовательно, метод может быть использован для анализа широкого круга временных рядов.

### Список литературы

1. **Прохоров, С. А.** Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов / С. А. Прохоров. – Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосмического ун-та, 2001. – 276 с.
2. **Прохоров, С. А.** Аппроксимативный анализ случайных процессов / С. А. Прохоров. – 2-е изд., перераб. и доп. – Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосмического ун-та, 2001. – 380 с.
3. **Broomhead, D. S.** Extracting Qualitative Dynamics from Experimental Data / D. S. Broomhead and G. P. King // *Physica 20D*. – 1986. – P. 217–236.

4. GistaT Group // <http://www.gistatgroup.com/>
5. Singular Spectrum Analysis: Methodology and Comparison. Hossein Hassani // Journal of Data Science. – 2007. – № 5. – P. 239–257.
6. SSA-MTM Group. <http://www.atmos.ucla.edu/tcd/ssa/>

---

***Станкевич Артур Игоревич***

аспирант,  
Самарский аэрокосмический  
университет им. академика  
С. П. Королева

***Stankevich Artur Igorevich***

post-graduate student,  
Samara State Aerospace University  
Named by Academician S. P. Korolyov

E-mail: [artur.stankevich@gmail.com](mailto:artur.stankevich@gmail.com)

---

УДК 681.518.3

**Станкевич, А. И.**

**Сингулярно-спектральный анализ корреляционных функций не-эквидистантных временных рядов / А. И. Станкевич // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 134–138.**

С. В. Булярский, А. В. Цыганков

## ТЕРМОДИНАМИКА ФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КЛАСТЕРОВ

*Аннотация.* Создана термодинамическая модель образования металлических кластеров. Показано, что выражение для функции распределения кластеров по размерам зависит от их взаимодействия с подложкой. Найден оптимальный размер кластера и показано, что его величина зависит от коэффициента поверхностного натяжения вещества, образующего кластер. Сопоставление вычисленных размеров кластеров железа хорошо согласуется с литературными данными.

*Ключевые слова:* металлические кластеры, размеры кластеров, поверхностное натяжение, образование металлических кластеров.

*Abstract.* In this work we created thermodynamics model of metal clusters formation. It is shown that expression for distribution function in the sizes depend on their interaction with a substrate. The optimum size of cluster was found and it is shown that its size depends on factor of a superficial tension of the substance forming cluster. Comparison of the calculated sizes clusters gland will be co-ordinated with the literary data well.

*Keywords:* metal clusters, sizes of clusters, superficial tension, metal clusters formation.

В последние годы проявляется большой интерес к процессу образования кластеров, поскольку именно кластеры играют важнейшую роль в процессе фазовых переходов и во многом определяют физические свойства веществ в различных агрегатных состояниях.

Процесс кластеризации представляет особый интерес для технологии, т.к. кластеры в газах и расплавах неизбежно участвуют в росте кристаллов [1]. Не являются исключением нанотрубки, т.к. они растут именно из металлических кластеров [2]. Подобные кластеры обладают рядом важных свойств. Например, магнитные свойства кластеров используются для записи информации, кластеры металлов на поверхности диэлектриков могут приводить к практически 100 % просветлению в определенной области длин волн падающего света. В связи с этим очень актуальной задачей является получение кластеров металлов нужного размера.

С этой целью в данной работе разработан алгоритм расчета функции распределения кластеров по размерам и показано, какие факторы влияют на данную величину.

Расчет будем вести в следующей последовательности:

- определим парциальную свободную энергию формирования кластера;
- рассчитаем параметры равновесного кластера и распределения кластеров по числу частиц в нем;
- проанализируем полученные результаты и вычислим распределение для кластеров железа.

Кластер – система связанных атомов и молекул. Парциальная свободная энергия кластера зависит от числа частиц в нем и от энергии связи между частицами, которая равна теплоте испарения атомов металла из жидкой фазы. Кластер, состоящий из большого числа атомных частиц, вообще говоря, не

является макроскопической системой. Это означает, что параметры кластера не всегда являются монотонной функцией числа частиц в нем.

Б. М. Смирновым [1] было показано, что для кластеров, образующих гранецентрированную, объемцентрированную либо гексагональную кристаллические решетки, можно получить следующее выражение для парциальной свободной энергии кластера:

$$g_i = -\Delta H n_i + B \Delta H n_i^{\frac{2}{3}}, \quad (1)$$

где  $B \approx 1,35$ ,  $\Delta H$  – величина энергии сублимации атомов из расплава;  $n_i$  – число атомов в кластере.

Знаки в данной формуле определяются отсчетом энергии. Знак минус указывает только на притяжение между атомами в кластере.

Эту формулу удобно использовать для кластера или капли, характер взаимодействия молекул которых на поверхности такой же, как и внутри. Существенным недостатком формулы (1) является ограниченное число параметров, от которых зависит свободная энергия формирования кластера. Учитывается только энергия сублимации. В то же время эксперименты показывают, что рост кластеров зависит от подложки. Это взаимодействие можно учесть путем введения поверхностного натяжения кластера и рассмотрев процессы смачивания поверхности подложки при формировании кластера. Тогда энергию кластера можно записать в виде

$$g_i = \Delta H n_i + 4\pi R_i^2 \sigma, \quad (2)$$

где  $R_i$  – радиус кластера в сферическом приближении;  $\sigma$  – энергия поверхностного натяжения, приходящаяся на единицу площади поверхности кластера. Данная энергия изменяется как в зависимости от условий роста, так и от подложки, если кластер образуется на ней.

**Расчет параметров металлических кластеров.** Расчет будем вести методом минимизации свободной энергии Гиббса [3, 4]. Как и в предыдущих случаях, начнем с законов сохранения. Будем считать, что кластеризация происходит в газовой фазе. Для расчета конфигурационной энтропии важно ввести понятие числа мест для молекул в газовой фазе. Число мест равно предельному числу молекул данного сорта, которые могут одновременно находиться в газовой фазе при данных условиях. В соответствии с этим определением число мест можно рассчитать исходя из давления насыщающего пара, состоящего целиком и полностью из молекул газа, рассматриваемого сорта. В данном случае металла.

Не зависимо от того, в каком агрегатном состоянии молекулы находятся, можно выделить число мест ( $N^{\text{Fe}}$ ) и число частиц ( $N_{\text{Fe}}$ ). В конденсированной жидкой среде все места заполнены частицами, поэтому эти два числа равны. В среде идеального газа эти числа можно выразить через давления:

$$N^{\text{Fe}} = p_s^{\text{Fe}} V^{\text{Fe}} / kT, \quad N_{\text{Fe}} = p^{\text{Fe}} V^{\text{Fe}} / kT, \quad (3)$$

где  $p^{\text{Fe}}$  – парциальное давление;  $p_s^{\text{Fe}}$  – парциальное давление насыщенного пара;  $V^{\text{Fe}}$  – объем, занимаемый атомами железа.

Для дальнейших рассуждений важно понять следующее. Число атомов железа в газовой фазе существенно меньше, чем число мест, т.к. давление пара железа существенно ниже давления насыщения. Кластеры образуются не потому, что в потоке газа насыщающий пар железа, а в результате взаимодействия между атомами, которые приводят к появлению кластеров. Кластер состоит из атомов железа и размещается по свободным местам как целое, хотя и состоящее из определенного количества частиц.

Важную роль играют **законы сохранения числа мест**. В данном случае происходит кластеризация одного сорта атомов, поэтому закон сохранения числа мест описывается одним уравнением:

$$\varphi^{\text{Fe}} = N^{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}}^0 = 0, \quad (4)$$

где  $N_{\text{Fe}}^0$  – число мест в газовой фазе, которые остаются свободными

Закон сохранения числа мест в случае кластера также имеет свои особенности. Мы введем следующие параметры кластера:  $N_i$  – число кластеров, содержащих одинаковое число частиц железа  $n_i$ . Произведение  $N_i n_i$  дает общее число частиц в кластерах, содержащих число частиц железа  $n_i$ . По индексу  $i$  мы будем проводить суммирование. Общее число атомов железа в системе остается постоянным. Так, в ней установилось стационарное состояние. Законы сохранения атомов описываются следующим уравнением:

$$\varphi_{\text{Fe}} = N_{\text{Fe}} - \sum_i N_i n_i = 0. \quad (5)$$

Термодинамическая вероятность определяется размещением атомов железа по местам, при этом они образуют центры, по которым размещаются кластеры, содержащие  $N_i n_i$  атомов. Так как перестановки атомов внутри кластеров не изменяют его, то необходимо это учитывать. Окончательно получаем

$$W = \frac{N^{\text{Fe}}! \prod_i (R_i)^{N_i}}{\left(N^{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}}^0\right)! \prod_i (N_i n_i)! (n_i!)^{N_i}}, \quad (6)$$

где  $R_i$  – кратность вырождения кластера.

В кристаллическом теле эта величина связана с понижением симметрии решетки при образовании кластера, сложного дефекта или комплекса. В газовой фазе понятие решетки неприменимо, поэтому вырождение отсутствует.

Свободную энергию кристалла запишем в виде

$$G = \sum_i N_i g_i - kT \ln W. \quad (7)$$

Используя формулы (4)–(7), запишем функционал, который будем минимизировать:

$$\Phi = \sum_i N_i g_i - kT \left[ -N^{\text{Fe}} + N^{\text{Fe}} \ln N^{\text{Fe}} + \sum_i N_i \ln R_i - \left(N^{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}}^0\right) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \ln \left( N^{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}}^0 \right) \Big] - kT \left[ N^{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}}^0 + \sum_i N_i n_i - \sum_i N_i n_i \ln(N_i n_i) + \right. \\ & \left. + \sum_i N_i n_i - \sum_i N_i n_i \ln(n_i) \right] + \lambda^{\text{Fe}} \left( N^{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}}^0 \right) + \lambda_{\text{Fe}} \left( N_{\text{Fe}} - \sum_i N_i n_i \right). \end{aligned}$$

Сокращая подобные члены, получаем

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_i N_i g_i - kT \left[ N^{\text{Fe}} \ln N^{\text{Fe}} + \sum_i N_i \ln R_i - \left( N^{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}}^0 \right) \times \right. \\ & \times \ln \left( N^{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}}^0 \right) \Big] - kT \left[ -N_{\text{Fe}}^0 + 2 \sum_i N_i n_i - \sum_i N_i n_i \ln(N_i n_i) - \right. \\ & \left. - \sum_i N_i n_i \ln(n_i) \right] + \lambda^{\text{Fe}} \left( N^{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}}^0 \right) + \lambda_{\text{Fe}} \left( N_{\text{Fe}} - \sum_i N_i n_i \right). \quad (8) \end{aligned}$$

Проводим операцию минимизации, для чего вычисляем производные:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N_i} = g_i - kT \left[ \ln R_i - \ln(N_i n_i)^{n_i} + n_i - \ln(n_i)^{n_i} \right] - \lambda_{\text{Fe}} n_i = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N^{\text{Fe}}} = -kT \left[ \ln(N^{\text{Fe}}) - \ln(N^{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}}^0) \right] + \lambda^{\text{Fe}} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N_{\text{Fe}}} = -kT \left[ \ln(N^{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}} - N_{\text{Fe}}^0) - 1 \right] + \lambda_{\text{Fe}} - \lambda^{\text{Fe}} = \mu_{\text{Fe}}; \quad (11)$$

$$\mu_{\text{Fe}} = \mu_{\text{Fe}}^0 + kT \ln(a_{\text{Fe}}). \quad (12)$$

Определяя из (10) и (11) неопределенные множители Лагранжа, из (9) с учетом (1) и (13) получаем формулу для числа кластеров, имеющих  $n_i$  атомов:

$$N_i = a_{\text{Fe}} (R_i) \frac{1}{n_i} \frac{N^{\text{Fe}}}{n_i^2} \exp \left[ \frac{\Delta H \left( 1 - 1,25 n_i^{-\frac{1}{3}} \right)}{kT} \right]. \quad (13)$$

С учетом (2) аналогично получаем:

$$N_i = a_{\text{Fe}} (R_i) \frac{1}{n_i} \frac{N^{\text{Fe}}}{n_i^2} \exp \left[ \frac{\Delta H - 4\pi a^2 \gamma(n_i) \frac{1}{3} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{3}{2}}}{kT} \right]. \quad (14)$$

Железо имеет объемцентрированную элементарную ячейку. Поэтому она имеет объем  $a^3$ , и в этом объеме находятся два атома. Соответственно, объем кластера  $a^3 n_i / 2$ , а его радиус можно вычислить по формуле

$$r_i = \left[ \frac{3 a^3 n_i}{8 \pi} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (15)$$

Радиус кластера, соответствующий максимуму функции распределения, связан с числом атомов в нем с помощью соотношения

$$R_{\max} = \frac{a^3 \gamma}{4kT}. \quad (16)$$

Вычисления показывают, что для кластера с оптимальным числом атомов радиус капли составляет 1,2 нм. Однако, т.к. распределение (13), (14) затухает медленно, то имеются и более крупные капли. Например, кластер, содержащий 10000 атомов, будет иметь размер – 3 нм (диаметр 6 нм). Расчеты хорошо согласуются с литературными данными [5].

### Список литературы

1. **Смирнов, Б. М.** Кластеры с плотной упаковкой // УФН. – 1992. – Т. 162. – № 1. – С. 119–138.
2. **Klinke, C.** Thermodynamic calculation on the catalytic growth of multiwall carbon nanotubes / C. Klinke, J. Bonard, K. Kern // arXiv: cond-mat/0307197. – 2005. – V. 2. – 30 Nov.
3. **Булярский, С. В.** Термодинамика и кинетика взаимодействующих дефектов в полупроводниках / С. В. Булярский, В. В. Фистуль. – М. : Наука, Физматлит, 1997. – 352 с.
4. **Булярский, С. В.** Физические основы управления дефектообразованием в полупроводниках / С. В. Булярский, В. В. Светухин. – Ульяновск : Изд-во Ульяновского университета, 2003. – 385 с.
5. **Rotkin, S. V.** Applied Physics of Carbon nanotubes / S. V. Rotkin, S. Subramoney // Springer, Berlin, 2005. – 350 с.

#### **Булярский Сергей Викторович**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
инженерной физики,  
Ульяновский  
государственный университет,  
Заслуженный деятель науки России,  
член-корреспондент АН Татарстана

#### **Bulyarsky Sergey Viktorovich**

Doctor of Science (in Physics), professor,  
head of sub-department of engineering  
physics, Ulyanovsk State University,  
Honoured worker in Science  
Corresponding Member of the Tatarstan  
Academy of Sciences

#### **Цыганцов Андрей Валерьевич**

аспирант, кафедра инженерной физики,  
Ульяновский государственный  
университет

#### **Cygancov Andrey Valeryevich**

the post-graduate student,  
sub-department of engineering physics,  
Ulyanovsk State University

УДК 538.951-405

**Булярский, С. В.**

**Термодинамика формирования металлических кластеров / С. В. Булярский, А. В. Цыганков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 139–144.**

В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, Ю. Г. Смирнов,  
Е. В. Грозная, П. В. Кревчик, С. А. Губина

## ТРАНСФОРМАЦИЯ СПЕКТРОВ ДВУХФОТОННОГО ПРИМЕСНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ДИССИПАТИВНОГО ТУННЕЛИРОВАНИЯ В КВАНТОВОЙ МОЛЕКУЛЕ\*

*Аннотация.* Теоретически исследовано влияние параметров диссипативного туннелирования на спектральную зависимость вероятности двухфотонного примесного поглощения в квантовой молекуле. Показано, что влияние прозрачности туннельного барьера на двухфотонное примесное поглощение в квантовой молекуле проявляется в изменении ширины энергетических уровней виртуального и конечного состояний за счет варьирования таких параметров диссипативного туннелирования, как температура, частота фононной моды и константа взаимодействия с контактной средой.

*Ключевые слова:* диссипативное туннелирование, квантовая молекула, двухфотонное примесное поглощение

*Abstract.* Influence of the dissipative tunneling parameters on dependence for the two – photon impurity absorption probability in quantum molecule, has been theoretically investigated. It is shown, that the tunnel barrier transparency influence on two – photon impurity absorption in quantum molecule is appeared in the energy levels width change for virtual and final states, because of variation of such dissipative tunneling parameters as temperature, local phonon frequency and the interaction constant with a heat bath.

*Keywords:* dissipative tunneling, quantum molecule, two-photon impurity absorption.

### Введение

Интерес к двухфотонному (ДФ) поглощению света в структурах с квантовыми точками (КТ) обусловлен, прежде всего, возможностью наблюдения двухфотонно возбуждаемой люминесценции, которая в настоящее время широко используется как метод исследования нанокристаллов, как неразрушающий метод считывания информации в устройствах трехмерной оптической памяти, а также при оптической накачке в лазерах. Наличие примесных центров в КТ не только расширяет круг возможных механизмов ДФ-поглощения, но и, что наиболее важно, за счет концентрации силы осциллятора в области энергетически наименьшего перехода вызывает увеличение оптической нелинейности полупроводниковых КТ, причем величина ДФ-поглощения в этом случае может значительно превышать аналогичную величину для объемного полупроводника [1]. В случае туннельно-связанных КТ (квантовая молекула (КМ)) туннельная прозрачность потенциального барьера, модифицируя электронный спектр КТ, может приводить ко многим интересным с фундаментальной и практической точки зрения эффектам. Цель настоящей работы за-

\* Текст данной статьи основан на материалах исследований, проведенных в рамках гранта Минобрнауки РФ по ФЦП «Развитие потенциала высшей школы» № 2.1.1/1647, а также в рамках тематического плана фундаментальных научных исследований по заданию Рособразования по гранту 1.15.09.

ключается в теоретическом исследовании влияния прозрачности туннельного барьера на оптические переходы при ДФ-ионизации  $D^-$ -центра в КМ.

### 1 Расчет вероятности двухфотонного примесного поглощения в квантовой молекуле

Влияние прозрачности туннельного барьера на ДФ-переходы с участием  $D^{(-)}$ -центра в КМ рассматривается в рамках науки о квантовом туннелировании с диссипацией. Актуальность развития науки о диссипативном туннелировании применительно к КМ, несмотря на использование инстантонных подходов, связана с возможностью получения основных результатов в аналитической форме, что в других часто используемых подходах, при необходимости учета влияния среды на процесс туннельного переноса, не представляется возможным.

Теоретический подход основан на рассмотрении квантового туннелирования с диссипацией применительно к электронному транспорту в КМ, моделируемой двухъямным осцилляторным потенциалом, с учетом взаимодействия с локальной фононной модой при конечной температуре. На рис. 1 изображен двухъямный потенциал КМ вдоль координаты туннелирования  $x$  и показан рассматриваемый ДФ оптический переход.

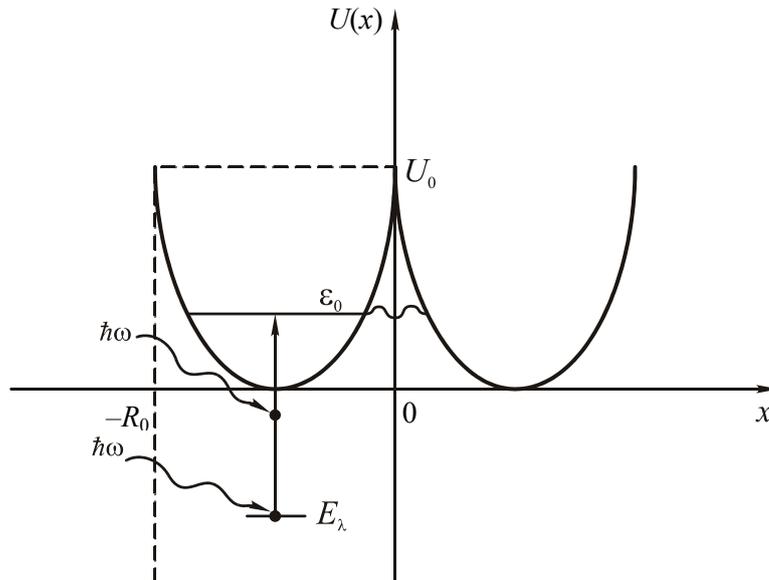


Рис. 1 Двухъямный потенциал КМ вдоль координаты туннелирования  $x$  и схема ДФ оптических переходов с участием примесного уровня:  $\hbar\omega$  – энергия поглощаемого фотона;  $E_\lambda < 0$  – положение энергетического уровня  $D^{(-)}$ -центра относительно дна КТ;  $\epsilon_0$  – уровень энергии основного состояния КТ;  $U_0$  – амплитуда потенциала конфайнмента КТ;  $R_0$  – радиус КТ

Поглощение света при ДФ-ионизации  $D^{(-)}$ -центра рассматривается для случая, когда примесный атом расположен в центре сферической КТ  $\vec{R}_a = (0, 0, 0)$ . Потенциал  $D^{(-)}$ -центра моделируется потенциалом нулевого

радиуса, в этом случае волновая функция начального состояния определяется следующим выражением [2]:

$$\Psi_{\lambda}(r) = \left\{ \frac{2\sqrt{\pi}}{\varepsilon_a^2} \frac{\Gamma(1-\varepsilon_a/2) \cdot a^3}{\Gamma(-\varepsilon_a/2-1/2)} \left[ \frac{\varepsilon_a}{2} \left( \Psi\left(-\frac{\varepsilon_a}{2}+1\right) - \Psi\left(-\frac{\varepsilon_a}{2}-\frac{1}{2}\right) - 1 \right) \right] \right\}^{-1/2} \times \\ \times \exp\left(-r^2/2a^2\right) \int_0^{\infty} dt \exp(-\beta t) (1 - \exp[-2t])^{-3/2} \exp\left\{ \frac{r^2 \exp(-2t)}{a^2 (1 - \exp[-2t])} \right\}, \quad (1)$$

где  $-\varepsilon_a = \beta - 3/2$ .

Волновая функция конечного состояния и электронный энергетический спектр имеют вид

$$\Psi_{n,l,m}(r) = \sqrt{\frac{n!}{a^3 \Gamma(l+3/2+n)}} \left(\frac{r}{a}\right)^l \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) L_n^{l+1/2}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) \times \\ \times \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) \cdot \exp(im\varphi); \\ E_{nl} = \hbar\omega_0(2n+l+3/2) + i\hbar\Gamma_0, \quad (2)$$

где  $\Gamma_0$  – ширина энергетического уровня в КТ;  $L_n^{l+1/2}(r^2/a^2)$  – обобщенные полиномы Лагерра;  $P_l^m(\cos\theta)$  – присоединенные функции Лежандра первого рода;  $n$ ,  $l$  и  $m$  – радиальное, орбитальное и магнитное квантовые числа соответственно;  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  – сферические координаты.

Эффективный гамильтониан взаимодействия с полем электромагнитной волны определяется выражением

$$\hat{H}_{\text{int}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2 \alpha^* I_0}{m^* \omega}} \exp(i\vec{q}\vec{r}) (\vec{e}_{\lambda} \hat{p}), \quad (3)$$

где  $\vec{e}_{\lambda}$  – единичный вектор поляризации;  $\vec{q}$  – волновой вектор;  $\lambda_0$  – коэффициент локального поля;  $\alpha^*$  – постоянная тонкой структуры с учетом диэлектрической проницаемости;  $I_0$ ,  $\omega$  – интенсивность и частота света соответственно.

Матричный элемент ДФ оптического перехода можно записать как

$$M = \sum_{n',l',m'} \frac{\langle \Psi_{n,l,m} | \hat{H}_{\text{int}} | \Psi_{n',l',m'} \rangle \langle \Psi_{n',l',m'} | \hat{H}_{\text{int}} | \Psi_{\lambda} \rangle}{-|E_{\lambda 0}| + E_{n',l',m'} - \hbar\omega - i\hbar\Gamma_0}, \quad (4)$$

где  $\Psi_{n',l',m'}$  и  $E_{n',l',m'}$  – волновая функция и энергия виртуального состояния:

$$\Psi_{n',1,0}(r) = \sqrt{\frac{3n'!}{2\pi a^3 \Gamma(5/2+n')}} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) L_{n'}^{3/2}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) P_1(\cos\theta);$$

$$E_{n'1} = \hbar\omega_0(2n' + 5/2) + i\hbar\Gamma_0. \quad (5)$$

С учетом (1), (3) и (5) выражение для матричного элемента  $\langle \Psi_{n',l',m'} | \hat{H}_{\text{int}} | \Psi_{n\lambda} \rangle$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{n',l',m'} | \hat{H}_{\text{int}} | \Psi_{n\lambda} \rangle &= i\lambda_0\pi\sqrt{\frac{\pi\alpha^* I_0}{6\omega}}\hbar\omega_0 \times \\ &\times \left\{ \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+1\right)a^3}{\beta^2\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\right)} \left( \frac{\beta}{2} \left[ \Psi\left(\frac{\beta}{2}+1\right) - \Psi\left(\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\right) \right] - 1 \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left( 2n' + \frac{5}{2} - \varepsilon_a \right) \sqrt{2n'!a^5\Gamma\left(n' + \frac{5}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n'} (-1)^k \frac{(2k+3)!!}{k!(n-k)!2^{k+2}} \frac{\Gamma(k+2)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(k+2+\frac{\beta}{2}\right)}. \quad (6) \end{aligned}$$

Здесь учтены правила отбора для магнитного  $m'$  и орбитального  $l'$  квантовых чисел виртуального состояния:  $m' = 0, l' = 1$ .

Матричный элемент, определяющий величину силы осциллятора дипольных оптических переходов электрона из виртуальных состояний  $\Psi_{n',l',m'}(\rho, \varphi, z)$  в конечные состояния  $\Psi_{n,l,m}(\rho, \varphi, z)$  квазидискретного спектра КТ, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{n,l,m} | \hat{H}_{\text{int}} | \Psi_{n',l',m'} \rangle &= i\lambda_0\sqrt{\frac{2\pi\alpha^*}{\omega}} I_0 (E_{n,l,m} - E_{n',l',m'}) \times \\ &\times \langle \Psi_{n,l,m}^*(\rho, \varphi, z) | (\vec{e}_\lambda, \vec{r}) | \Psi_{n',l',m'}(\rho, \varphi, z) \rangle. \quad (7) \end{aligned}$$

Учитывая выражения (3) для энергетического спектра и волновой функции электрона в КТ, а также (5), матричный элемент (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{n,l,m} | \hat{H}_{\text{int}} | \Psi_{n',1,0} \rangle &= i\lambda_0\sqrt{\frac{2\pi\alpha^*}{\omega a^6}} I_0 \hbar\omega_0 (2n+l-2n'-1) \left(\frac{r}{a}\right)^{l+1} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \times \\ &\times \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \sqrt{\frac{3n'!n!}{2\pi\Gamma(l+3/2+n)\Gamma(5/2+n')}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi dr d\theta d\varphi r^3 \sin\theta \cos^2\theta \left(\frac{r}{a}\right)^{l+1} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) L_{n'}^{3/2}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) L_n^{l+1/2}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) P_l^m(\cos\theta) \exp(-im\varphi). \quad (8) \end{aligned}$$

Расчет матричного элемента дипольных оптических переходов в (8) приводит к интегралам вида

$$\int_0^{2\pi} \exp(-im\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq 0, \\ 2\pi, & \text{если } m = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta P_l(\cos\theta) d\theta = \begin{cases} \frac{4}{15}, & \text{если } l = 2, \\ 0, & \text{если } l \neq 2. \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, имеют место следующие правила отбора: оптические переходы из основного  $s$ -состояния  $D^{(-)}$ -центра идут в виртуальные  $p$ -состояния КТ, а оптические переходы из виртуальных  $p$ -состояний – в возбужденные  $d$ -состояния КТ. С учетом указанных правил отбора для интеграла по переменной  $r$  имеем

$$\int_0^\infty r^3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) L_{n'}^{3/2}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) L_n^{5/2}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) dr = a^4 \frac{\Gamma\left(n' + \frac{7}{2}\right)}{n'!} \delta_{n',n}, \quad (11)$$

где  $\delta_{n',n}$  – символ Кронекера.

После суммирования в (4) по виртуальным состояниям для квадрата модуля матричного элемента будем иметь

$$|M|^2 = \frac{I_0^2 \hbar \lambda_0^4 \alpha^{*2} a^4 \pi^{7/2} \beta^2 n! \left(n + \frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right)}{90 \omega^2 E_d \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2} + 1\right) \left[\left(\frac{\beta}{2}\right) \left(\Psi\left(\frac{\beta}{2} + 1\right) - \Psi\left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right)\right) - 1\right]} \times$$

$$\times \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right)}{(n-k)! \Gamma\left(k + \frac{5}{2}\right) k!} \frac{(2k+3)!! \Gamma(k+2) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2^{k+2} \Gamma\left(\frac{\beta}{2} + k + 2\right)} \right]^2 \times$$

$$\times \frac{(2n+1+\beta)^2}{\left(\beta^{-1} \left(2n + \frac{5}{2}\right) - \eta^2 - X\right)^2 + \frac{\hbar^2}{E_d^2} \Gamma}. \quad (12)$$

Для учета размытия резонанса рассеянием электрона введем лоренцево уширение дельтаобразных пиков:

$$\delta_\tau(x) = \frac{(\pi\tau)^{-1}}{\tau^{-2} + x^2}, \quad (13)$$

где  $\tau$  – феноменологическое время релаксации.

Тогда выражение для вероятности двухфотонного перехода запишется как

$$W(2\omega) = \frac{2\pi}{\hbar I_0} \sum_n |M|^2 \frac{\Gamma_0}{E_d \left( \left( \beta^{-1} \left( 2n + \frac{5}{2} \right) - \eta^2 - X \right)^2 + \frac{\hbar^2}{E_d^2} \Gamma_0^2 \right)}, \quad (14)$$

здесь  $X = \hbar\omega / E_d$  – энергия фотона в единицах эффективной борновской энергии  $E_d$ .

С учетом (12) для вероятности ДФ-перехода будем иметь

$$W(2\omega) = \sum_n \frac{I_0 \lambda_0^4 \alpha^{*2} a^4 \pi^{9/2} \beta^2 n! \left( n + \frac{5}{2} \right) \Gamma \left( \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \right)}{45 X^2 E_d \Gamma \left( n + \frac{3}{2} \right) \Gamma \left( \frac{\beta}{2} + 1 \right) \left[ \left( \frac{\beta}{2} \right) \left( \Psi \left( \frac{\beta}{2} + 1 \right) - \Psi \left( \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) - 1 \right]} \times$$

$$\times \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma \left( n + \frac{5}{2} \right)}{(n-k)! \Gamma \left( \kappa + \frac{5}{2} \right) k!} \frac{(2k+3)!!}{2^{k+2}} \frac{\Gamma(\kappa+2) \Gamma \left( \frac{\beta}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{\beta}{2} + k + 2 \right)} \right]^2 \times$$

$$\times \frac{(2n+1+\beta)^2 \hbar \Gamma_0}{\left( \left( \beta^{-1} \left( 2n + \frac{5}{2} \right) - \eta^2 - X \right)^2 + \frac{\hbar^2}{E_d^2} \Gamma_0^2 \right)^2}, \quad (15)$$

здесь  $\Gamma_0 = B \exp(-S)$  – вероятность диссипативного туннелирования в КМ с учетом взаимодействия с локальной фононной модой среды. Предэкспоненциальный множитель  $B$  и одноинстантонное действие в борновских единицах имеют соответственно вид [3]

$$B^* = \frac{E_d}{\hbar} \frac{2\sqrt{U_0^*} (1+b^*) \sqrt{\epsilon_T^*}}{\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{A^* \left[ \beta_1^* \operatorname{ch} \left( \frac{\beta_1^*}{2} \right) - 1 \right] + D^* \left[ \beta_2^* \operatorname{ch} \left( \frac{\beta_2^*}{2} \right) - 1 \right]}{\left[ A^* \left[ \frac{\beta_1^*}{2} \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{\beta_1^*}{2} - \tilde{\tau}_{01}^* \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{\beta_1^*}{2} \right)} - 1 \right] + D^* \left[ \frac{\beta_2^*}{2} \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{\beta_2^*}{2} - \tilde{\tau}_{02}^* \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{\beta_2^*}{2} \right)} - 1 \right] \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} +$$

$$+ \frac{\left. \begin{aligned} & A^* \left[ 1 - \frac{\beta_1^*}{2} \frac{\operatorname{ch} \left[ \frac{\beta_1^*}{2} - \tilde{\tau}_{01}^* \right]}{\operatorname{sh} \left[ \frac{\beta_1^*}{2} \right]} \right] + D^* \left( \frac{\beta_2^*}{2} * \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{\beta_2^*}{2} - \tilde{\tau}_{02}^* \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{\beta_2^*}{2} \right)} - 1 \right) \\ & \left\{ A^* \left[ \frac{\beta_1^*}{2} \frac{\operatorname{ch} \left[ \frac{\beta_1^*}{2} - \tilde{\tau}_{01}^* \right]}{\operatorname{sh} \left[ \frac{\beta_1^*}{2} \right]} - 1 \right] + D^* \left( \frac{\beta_2^*}{2} * \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{\beta_2^*}{2} - \tilde{\tau}_{02}^* \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{\beta_2^*}{2} \right)} - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\}}{\left. \begin{aligned} & A^* \left[ 1 - \frac{\beta_1^*}{2} \frac{\operatorname{ch} \left[ \frac{\beta_1^*}{2} - \tilde{\tau}_{01}^* \right]}{\operatorname{sh} \left[ \frac{\beta_1^*}{2} \right]} \right] + D^* \left( \frac{\beta_2^*}{2} * \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{\beta_2^*}{2} - \tilde{\tau}_{02}^* \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{\beta_2^*}{2} \right)} - 1 \right) \\ & \left\{ A^* \left[ \frac{\beta_1^*}{2} \frac{\operatorname{ch} \left[ \frac{\beta_1^*}{2} - \tilde{\tau}_{01}^* \right]}{\operatorname{sh} \left[ \frac{\beta_1^*}{2} \right]} - 1 \right] + D^* \left( \frac{\beta_2^*}{2} * \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{\beta_2^*}{2} - \tilde{\tau}_{02}^* \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{\beta_2^*}{2} \right)} - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\}}, \quad (16)$$

где  $\tilde{\tau}_{01}^* = 2\sqrt{\gamma_1}\tau_0$ ,  $\tilde{\tau}_{02}^* = 2\sqrt{\gamma_2}\tau_0$ ,  $A^* = -\omega_0^2 \frac{(\omega_L^2 - \gamma_1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - \gamma_2)}$ ,  $D^* = \omega_0^2 \frac{(\omega_L^2 - \gamma_2)}{2\gamma_1(\gamma_1 - \gamma_2)}$ ,

$$\beta_2^* = \sqrt{\gamma_1}\beta, \quad \beta_1^* = \sqrt{\gamma_2}\beta, \quad \gamma_{1,2} = \omega_0^2 \frac{\left( \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2} + 1 + \frac{C^2}{\omega_L^2 \omega_0^2} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2} + 1 + \frac{C^2}{\omega_L^2 \omega_0^2} \right)^2 - \frac{4\omega_L^2}{\omega_0^2}}}{2}.$$

$$S = a^* \sqrt{U_0^*} \left\{ \frac{1}{2} (b^* + 1)(3 - b^*) \tau_0^* - \frac{(b^* + 1)^2 (\tau_0^*)^2}{2\beta^*} - \frac{(b^* + 1)^2}{2\tilde{\gamma}'} \left\{ \frac{(1 - \tilde{x}_2)}{\sqrt{\tilde{x}_1}} \times \right. \right. \\ \times \left[ \operatorname{cth} \left( \beta^* \sqrt{\tilde{x}_1} \right) - \frac{1}{\operatorname{sh} \left( \beta^* \sqrt{\tilde{x}_1} \right)} \left\{ \operatorname{ch} \left( (\beta^* - \tau_0^*) \sqrt{\tilde{x}_1} \right) - \operatorname{ch} \left( \beta^* \sqrt{\tilde{x}_1} \right) \right\} + \operatorname{ch} \left( (\beta^* - \tau_0^*) \sqrt{\tilde{x}_1} \right) \right] - \\ \left. - \frac{(1 - \tilde{x}_1)}{\sqrt{\tilde{x}_2}} \left[ \operatorname{cth} \left( \beta^* \sqrt{\tilde{x}_2} \right) - \frac{1}{\operatorname{sh} \left( \beta^* \sqrt{\tilde{x}_2} \right)} \left\{ \operatorname{ch} \left( (\beta^* - \tau_0^*) \sqrt{\tilde{x}_2} \right) - \operatorname{ch} \left( \beta^* \sqrt{\tilde{x}_2} \right) \right\} + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{ch} \left( (\beta^* - \tau_0^*) \sqrt{\tilde{x}_2} \right) \right] \right\} \right\}, \quad (17)$$

где  $\tau_0^* = \operatorname{arsh} \left( \frac{1 - b^*}{1 + b^*} \operatorname{sh} \beta^* \right) + \beta^*$ ;  $b^* = b/a$ ;  $\beta^* = \sqrt{U_0^*}/(a^* \varepsilon_T^*)$ ;  $\varepsilon_T^* = kT/E_d$ ;

$\varepsilon_L^* = h\omega_L/E_d$ ,  $\omega_L$  – частота фононной моды;  $\varepsilon_C^* = h\sqrt{C}/E_d$ ,  $C$  – константа

взаимодействия с контактной средой;  $\tilde{\gamma}' = \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{4U_0^*} + 1 + \frac{\varepsilon_C^4 a^{*2}}{4\varepsilon_L^{*2} U_0^*} \right)^2 - \frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{U_0^*}}$ ;

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{4U_0^*} + 1 + \frac{\varepsilon_c^4 a^{*2}}{4\varepsilon_L^{*2} U_0^*} - \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{4U_0^*} + 1 + \frac{\varepsilon_c^4 a^{*2}}{4\varepsilon_L^{*2} U_0^*} \right)^2 - \frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{U_0^*}} \right];$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{4U_0^*} + 1 + \frac{\varepsilon_c^4 a^{*2}}{4\varepsilon_L^{*2} U_0^*} + \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{4U_0^*} + 1 + \frac{\varepsilon_c^4 a^{*2}}{4\varepsilon_L^{*2} U_0^*} \right)^2 - \frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{U_0^*}} \right].$$

На рис. 2 представлена зависимость вероятности туннелирования  $\Gamma_0$  от параметров  $\varepsilon_L^*$ ,  $\varepsilon_C^*$  и  $\varepsilon_T^*$ , определяющих соответственно частоту фононной моды, константу взаимодействия с контактной средой и температуру. Как видно из рис. 2, а, с ростом частоты фононной моды вероятность туннелирования в КМ возрастает за счет увеличения эффективности электрон-фононного взаимодействия. Возрастание константы взаимодействия приводит к увеличению вязкости контактной среды, т.е. к росту ее «степени диссипативности», и вероятность туннелирования падает (рис. 2, б).

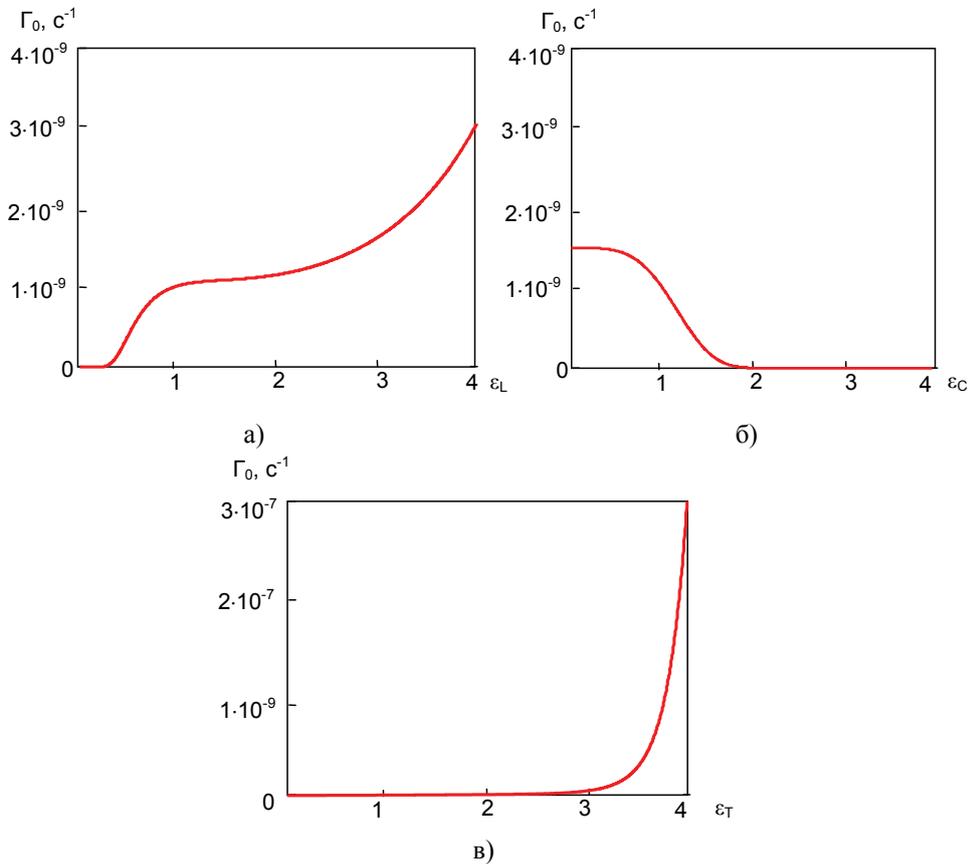


Рис. 2 Зависимость величины  $\Gamma_0$  от параметров туннелирования:

а –  $\varepsilon_L^*$  при  $U_0 = 0,25$  эВ,  $\varepsilon_T^* = 1, \varepsilon_C^* = 1$ ; б –  $\varepsilon_C^*$  при  $U_0 = 0,25$  эВ,  $\varepsilon_T^* = 1, \varepsilon_L^* = 1$ ;  
 в –  $\varepsilon_T^*$  при  $U_0 = 0,25$  эВ,  $\varepsilon_C^* = 1, \varepsilon_L^* = 1$

## 2 Спектральная зависимость вероятности двухфотонного примесного поглощения

На рис. 3 представлена спектральная зависимость вероятности ДФ-поглощения при фотоионизации  $D^{(-)}$ -центра в КМ на основе *InSb* для различных значений параметров туннелирования  $\epsilon_L^*$ ,  $\epsilon_C^*$  и  $\epsilon_T^*$ . Можно видеть, что с ростом частоты фононной моды растет и вероятность ДФ-поглощения (рис. 3,б). Увеличение «вязкости» среды приводит к достаточно сильному подавлению ДФ поглощения в КМ (рис. 3,в).

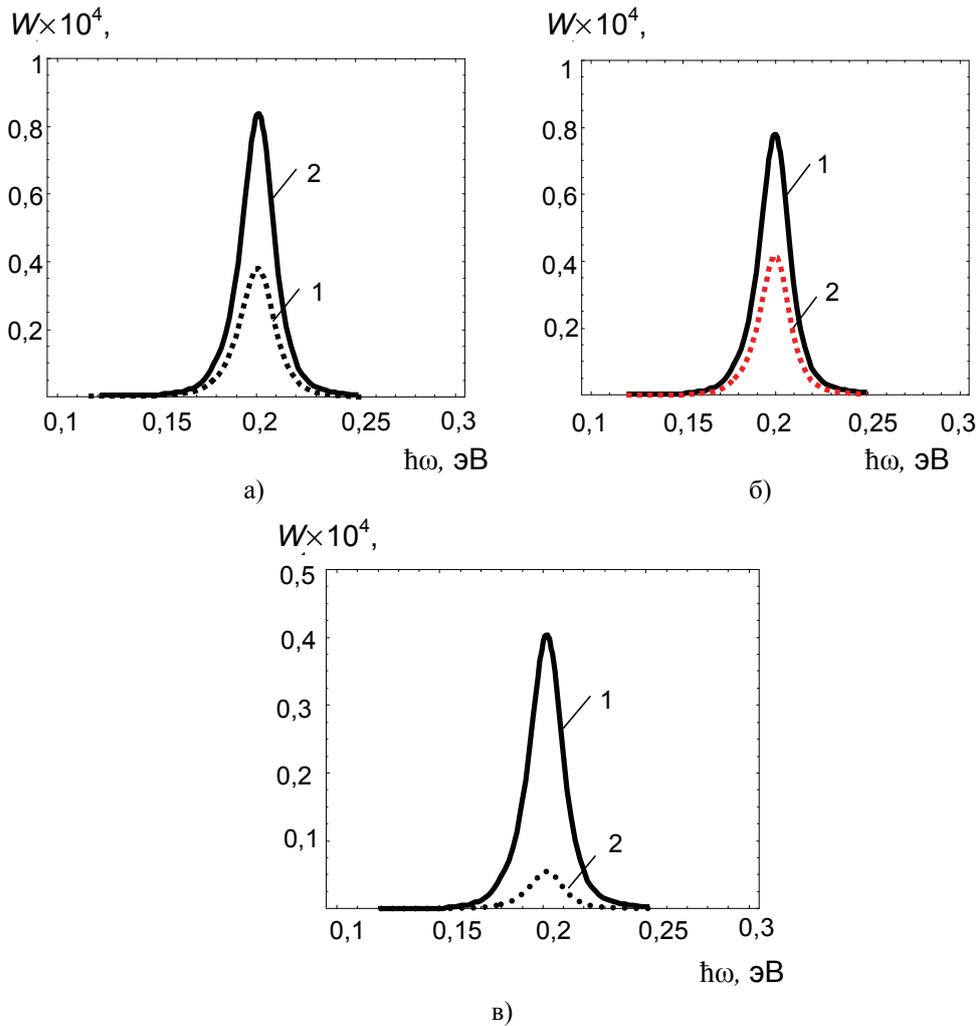


Рис. 3 Спектральная зависимость вероятности ДФ-поглощения при фотоионизации  $D^{(-)}$ -центра в КМ для различных значений параметров туннелирования:  
 а –  $\epsilon_T^*$  при  $U_0 = 0,3$  эВ,  $R_0 = 65$  нм,  $\epsilon_C^* = 1, \epsilon_L^* = 1$ : 1 –  $\epsilon_T^* = 0,1$ ; 2 –  $\epsilon_T^* = 1$ ;  
 б –  $\epsilon_L^*$  при  $\epsilon_T^* = 1, \epsilon_C^* = 1$ : 1 –  $\epsilon_L^* = 1$ ; 2 –  $\epsilon_L^* = 0,1$ ;  
 в –  $\epsilon_C^*$  при  $\epsilon_T^* = 1, \epsilon_L^* = 1$ : 1 –  $\epsilon_C^* = 1$ ; 2 –  $\epsilon_C^* = 1,5$

Таким образом, прозрачность туннельного барьера существенно влияет на ДФ примесное поглощение в КМ за счет изменения ширины энергетических уровней виртуального и конечного состояний при варьировании таких параметров диссипативного туннелирования, как температура, частота фоновой моды и константа взаимодействия с контактной средой.

С прикладной точки зрения полученные результаты важны при изготовлении лазерных структур на основе массива КТ, когда необходимо учитывать влияние туннельной прозрачности потенциальных барьеров на вероятность ДФ оптической накачки.

#### **Список литературы**

1. **Бугаев, А. А.** Двухфотонное поглощение полупроводниковых микрокристаллов с размерным ограничением / А. А. Бугаев, А. Л. Стакевич // ФТТ. – 1992. – Т. 34. – № 5. – С. 1613–1319.
2. **Krevchik, V. D.** Two-Photon Interband Absorption in Quantized Semiconductor Films with Participation of Deep Impurity Centers / V. D. Krevchik, A. Ya. Yafasov // Phys. St.Sol (b). – 1982. – V. 109. – P. k97–k101.
3. **Жуковский, В. Ч.** Изучение управляемости туннелирования в структурах типа «квантовая точка – квантовая яма» или «квантовая молекула» / В. Ч. Жуковский, Ю. И. Дахновский, В. Д. Кревчик [и др.] // Вестник МГУ. – 2006. – № 3. – С. 24–27. – (Серия 3. Физика. Астрономия).

---

#### ***Кревчик Владимир Дмитриевич***

доктор физико-математических наук,  
профессор,  
заведующий кафедрой физики,  
Пензенский государственный  
университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

#### ***Семенов Михаил Борисович***

доктор физико-математических наук,  
профессор, кафедра физики,  
Пензенский государственный  
университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

#### ***Смирнов Юрий Геннадьевич***

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
математики и суперкомпьютерного  
моделирования,  
Пензенский государственный  
университет

#### ***Krevchik Vladimir Dmitrievich***

Doctor of Science (in Physics), professor,  
head of sub-department of physics,  
Penza State University

#### ***Semenov Mikhail Borisovich***

Doctor of Science (in Physics), professor,  
sub-department of physics,  
Penza State University

#### ***Smirnov Yury Gennadyevich***

Doctor of Science (in Mathematics),  
professor, head of sub-department  
of mathematics and supercomputer  
modeling, Penza State University

**Грозная Елена Владимировна**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра физики,  
Пензенский государственный  
университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

**Groznaia Elena Vladimirovna**

PhD in Physics, associate professor,  
sub-department of physics,  
Penza State University

**Кревчик Павел Владимирович**

студент, Пензенский  
государственный университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

**Krevchik Pavel Vladimirovich**

graduate student,  
Penza State University

---

УДК 621.315.592

**Кревчик, В. Д.**

**Трансформация спектров двухфотонного примесного поглощения в условиях диссипативного туннелирования в квантовой молекуле / В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, Ю. Г. Смирнов, Е. В. Грозная, П. В. Кревчик, С. А. Губина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 145–155.**

## **Вниманию авторов!**

Редакция журнала «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» приглашает специалистов опубликовать на его страницах оригинальные статьи, содержащие новые научные результаты в области математики, физики, механики, а также обзорные статьи по тематике журнала.

Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

Редакция принимает к рассмотрению статьи, подготовленные с использованием текстового редактора Microsoft Word for Windows версий не выше 2003.

Необходимо представить статью в электронном виде (VolgaVuz@mail.ru, дискета 3,5", CD-диск) и дополнительно на бумажном носителе в двух экземплярах.

Оптимальный объем рукописи 10–14 страниц формата А4. Основной шрифт статьи – Times New Roman, 14 pt через полуторный интервал. Тип файла в электронном виде – RTF.

Статья **обязательно** должна сопровождаться индексом УДК, краткой аннотацией и ключевыми словами **на русском и английском языках**.

Рисунки и таблицы должны быть размещены в тексте статьи и представлены в виде отдельных файлов (растровые рисунки в формате TIFF, BMP с разрешением 300 dpi, векторные рисунки в формате Corel Draw с минимальной толщиной линии 0,75 pt). Рисунки должны сопровождаться подрисовочными подписями.

Формулы в тексте статьи выполняются в редакторе формул Microsoft Word Equation, версия 3.0 и ниже. Символы греческого и русского алфавита должны быть набраны прямо, нежирно; латинского – курсивом, нежирно; обозначения векторов и матриц прямо, жирно; цифры – прямо, нежирно. Наименования химических элементов набираются прямо, нежирно. Эти же требования **необходимо** соблюдать и в рисунках. Допускается вставка в текст специальных символов (с использованием шрифтов Symbol).

В списке литературы **нумерация источников** должна соответствовать **очередности ссылок** на них в тексте ([1], [2], ...). Номер источника указывается в квадратных скобках. В списке указывается:

- для книг – фамилия и инициалы автора, название, город, издательство, год издания, том, количество страниц;
- для журнальных статей, сборников трудов – фамилия и инициалы автора, название статьи, полное название журнала или сборника, серия, год, том, номер, выпуск, страницы;
- для материалов конференций – фамилия и инициалы автора, название статьи, название конференции, время и место проведения конференции, город, издательство, год, страницы.

В конце статьи допускается указание наименования программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

К материалам статьи **должна** прилагаться информация для заполнения учетного листа автора: фамилия, имя, отчество, место работы и должность, ученая степень, ученое звание, адрес, контактные телефоны (желательно сотовые), e-mail.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Рукопись, полученная редакцией, не возвращается.

Редакция оставляет за собой право проводить редакторскую и допечатную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла, без согласования с автором.

**Статьи, оформленные без соблюдения приведенных выше требований, к рассмотрению не принимаются.**